Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista III de Exercícios (aulas 3.1, 3.2, 3.3 e 4.1)
Fórmulas de De Moivre e Topologia em $\mathbb{C}$

1. Calcule $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^6$ e $(1+i)^{2010}$.

2. Escreva sob a forma $a+bi$ cada complexo a seguir:

   (a) $z = \sqrt{1-i}$ (b) $z = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$ (c) $z = \sqrt[4]{1}$

3. Resolva, em $\mathbb{C}$, cada equação a seguir:
   (a) $z^4 = 3$ (b) $z^2+z+1=0$ (c) $z^8 - 14z^4 + 48 = 0$

4. Encontre os pontos $z = x+yi$ tais que

   (a) $|z| \leq 2$ (b) $\mathfrak{Im} z > 0$ (c) $\mathfrak{Im}\dfrac{z-1}{z+1} \leq 1$

   (d) $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geq 2$ (e) $2 < \left|\dfrac{z-i}{i}\right| < 3$ (f) $\mathfrak{Re}\dfrac{1-z}{z+2} > 1$

   Faça também uma representação geométrica em cada caso.

5. Encontre as raízes cúbicas de $-1+i$. Localize-as no plano de Argand-Gauss e em seguida calcule a área do polígono com vértices nestes pontos.

6. Suponha que sen $\frac{\theta}{2} \neq 0$ e que n é um inteiro positivo. Mostre que

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\text{sen}\,(n+\frac{1}{2})\theta}{2\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2}}.$$

   Sugestão. Pela fórmula de De Moivre,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta = \mathfrak{Re}(\sum_{k=0}^{n}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k).$$

   Coloque $w = \cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta$. Então

$$\sum_{k=0}^{n}(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k = \sum_{k=0}^{n} w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w}.$$

7. Verifique se as regiões obtidas em cada item do Exercício 4 é aberta, limitada, conexa ou fechada.

8. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ conjuntos fechados em $\mathbb{C}$. Prove que $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ também é um fechado em $\mathbb{C}$.

9. Dê um contra-exemplo para mostrar que uma união de conjuntos fechados de $\mathbb{C}$ pode não ser um um conjunto fechado.

10. Considere $G_n = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ Ao variar n nos naturais temos que G_n determina uma família de abertos em $\mathbb{C}$. A união desta família é um aberto ou um fechado de $\mathbb{C}$?

11. Dado o conjunto X em cada item a seguir, faça sua representação geométrica. Em seguida, determine int X; ∂X e $\overline{X}$. O conjunto X é aberto, fechado ou nem aberto e nem fechado?

    (a) $X = \{z \in \mathbb{C} : |2z - i| < 1\}$.

    (b) $X = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z) < 1\}$.

    (c) $X = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z - i| < 2\}$.

12. O conjunto $P = \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| < \frac{1}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z + 3| < \frac{1}{2}\}$ é conexo? Justifique.

13. Dizemos que um conjunto de $\mathbb{C}$ é um *domínio* do plano complexo $\mathbb{C}$ se for aberto não vazio e conexo. Isto posto, verifique se os conjuntos a seguir são domínios de $\mathbb{C}$.

    (a) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z - 3i) < 0, \mathfrak{Im}(iz) < 0, |z| \leq 3\}$

    (b) $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}(z - 3i) \geq 0 \text{ ou } \mathfrak{Im}(iz - i) < 0\} \cap \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - 2| < 4\}$

14. Mostre que a região $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R} \text{ com } 0 \leq x \leq 1\}$ é fechada mas não limitada. Destaque um ponto qualquer em $\partial\Omega$ e justifique por quê o mesmo é um ponto de fronteira.

15. Se $X = \{x + iy : x \text{ e } y \text{ são racionais}\}$, calcule int X, $\overline{X}$ e ∂X.

16. Justifique que o conjunto $X = \{\dfrac{1+i}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ não é aberto e nem fechado de $\mathbb{C}$. Mostre que 0 é ponto de acumulação de X.

17. Dado o conjunto $W = \{i - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Qual(is) é(são) o(s) ponto(s) de acumulação deste conjunto?

18. Determine ∂P e int P, onde $P = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\left(\dfrac{z}{z - i}\right) > 0\}$. Esse conjunto é limitado? É compacto? Justifique.