Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Variáveis Complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista II de Exercícios (aulas 2.1, 2.2 e 2.3)

Obs.: Nos exercícios de 01 a 04, considere φ a aplicação $S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ estudada em aula e φ^{-1} a aplicação inversa.

1. Quais os pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ sobre S^2 tais que $\varphi(P) = x_1 + x_2 i$ em $\mathbb{C}$? Ou seja, quais são os *pontos fixos* de φ? Interprete também geometricamente.

2. Do estudo de projeções estereográficas, mostre que a imagem por φ^{-1} de toda reta de $\mathbb{C}$ corresponde a uma circunferência em S^2, passando pelo pólo norte.

3. Prove que toda circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ corresponde por φ^{-1}, a uma circunferência em S^2.

4. Qual é a imagem em S^2 por φ^{-1} do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$?

5. Prove que o argumento do produto de dois números complexos é igual à soma dos argumentos. Em seguida, calcule o argumento de $i(1+i)$.

6. Representar na forma trigonométrica cada complexo a seguir:

   (a) $z = -1 + i$ (b) $z = -1 - \sqrt{3}i$ (c) $z = -\sqrt{3} + i$
   (d) $z = -i$ (e) $z = -\sqrt{3} - 3i$ (f) $z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

7. Se $z \neq 0$, mostre que
$$\arg \frac{1}{z} = -\arg z \quad \text{e} \quad \arg \frac{w}{z} = \arg w - \arg z.$$

8. Determine o número complexo z tal que $\arg(z + 1 + i) = \frac{\pi}{4}$ e $|z|^2 = 2$.

9. Determine $\dfrac{z}{w}$ e zw, sendo $z = \sqrt{3}(\cos\dfrac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5})$ e $w = 2(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4})$

10. Se $z_k = r_k(\cos\theta_k + i \operatorname{sen}\theta_k)$ para $k = 1, 2$, prove que
$$z_1 + z_2 = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$
onde
$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{r_1 \operatorname{sen}\theta_1 + r_2 \operatorname{sen}\theta_2}{r_1 \cos\theta_1 + r_2 \cos\theta_2}.$$