Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de variáveis complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Projeção estereográfica. Limite de sequências em $\mathbb{C}$.

Obs.: Nos exercícios a seguir, considere φ a aplicação $S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ estudada em aula e φ^{-1} a aplicação inversa.

1. Quais os pontos $P(x_1, x_2, x_3)$ sobre S^2 tais que $\varphi(P) = x_1 + x_2 i$ em $\mathbb{C}$? Ou seja, quais são os *pontos fixos* de φ? Interprete também geometricamente.

2. Do estudo de projeções estereográficas, mostre que a imagem por φ^{-1} de toda reta de $\mathbb{C}$ corresponde a uma circunferência em S^2, passando pelo pólo norte.

3. Prove que toda circunferência de $\overline{\mathbb{C}}$ corresponde por φ^{-1}, a uma circunferência em S^2.

4. Defina sequência em $\mathbb{C}$ e exemplifique. Defina $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ e dê um exemplo. Em seguida, prove que, se $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = b$, então
$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = a \pm b\,; \quad \lim_{n\to\infty} z_n \cdot w_n = a \cdot b \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b},$$
desde que $b \neq 0$.

5. Prove que uma sequência complexa $z_n = x_n + iy_n$ converge para $\alpha = a + bi$ se, e somente se,
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

6. **Def.** *Uma sequência (z_n) em $\mathbb{C}$ é* **limitada** *se, e somente se, existir $K > 0$ tal que $|z_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.* Dê uma interpretação geométrica para esta definição. Isto posto, prove o seguinte resultado:

   Proposição. *Toda sequência complexa convergente é limitada.*

   A recíproca é verdadeira? Justifique.

7. Defina $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

8. Por uma *vizinhança* no pólo norte N da esfera de Riemann S^2 definimos mediante a projeção estereográfica uma vizinhança do infinito no plano complexo extendido. Descreva tal vizinhança geometricamente. Dada uma sequência de pontos (z_n) no plano complexo $\mathbb{C}$, seja (P_n) a sequência de pontos correspondente na esfera de Riemann. Prove que $z_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ se, e somente se, $P_n \to N$ quando $n \to \infty$, i.e., se, e somente se, toda vizinhança de N contém um número infinito de termos da sequência (P_n).