Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Funções Transcendentes - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Primeiros conceitos da Trigonometria

1. (Unifor-CE) Em uma circunferência de raio 6 cm, um ângulo central de medida 15° determina um arco cujo comprimento, em centímetros, é aproximadamente

   (a) 1,75 (b) 1,68 (c) 1,57 (d) 1,05 (e) 0,78

2. Calcule o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ definido numa circunferência de raio $r = 10$ cm, por um ângulo de 60°.

3. Um ângulo central de uma circunferência de raio 30 cm intercepta um arco de 6 cm. Expresse o ângulo central α em radianos e em graus.

4. Um setor de um círculo possui um ângulo central de 50° e uma área de 605 cm^2. Encontre o valor aproximado do raio do círculo.

5. Encontre a área do setor circular determinado por um ângulo central de 100° em um círculo de raio 12 cm.

6. Calcule a área do setor circular determinado por um ângulo central de $\frac{\pi}{3}$ rad em um círculo de diâmetro 32 cm.

7. Converta para radianos:

   (a) 32° (b) 184° (c) $48°27'34''$ (d) $59°30''$

8. Converta para graus:

   (a) $\frac{\pi}{5}$ rad (b) $\frac{5\pi}{3}$ rad (c) 1 rad (d) $1,2$ rad

9. Um garoto está empinando um papagaio. Sabemos que a linha mede 30m e está bem esticada, determinando um ângulo de 30° com o solo. A que altura se encontra o papagaio?

10. Uma escada de um bombeiro pode ser extendida até um comprimento máximo de 25m, formando um ângulo de 70° com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2m do solo. Qual á altura máxima que a escada atinge?

11. Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30m, passa a ver o edifício sob um ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

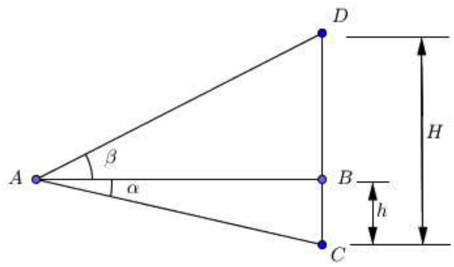
12. Em um triângulo qualquer ETQ, o lado $\overline{ET} = 13$cm e $\hat{E} = 60°$. Determine a medida da altura relativa ao lado $\overline{EQ}$.

13. Determine o perímetro e a área de um trapézio retângulo cujas bases medem 6dm e 15dm e um dos ângulos 120°.

14. Calcule a altura de um triângulo equilátero que tem 10 cm de lado.

15. (Cesep - PE) Do alto de uma torre de 50m de altura, localizada numa ilha, avista-se a praia sob um ângulo de 45^o em relação ao plano horizontal. Para transportar material da praia até a ilha, um barqueiro cobra R$ 0,20 por metro navegado. Quanto ele recebe em cada transporte que faz?

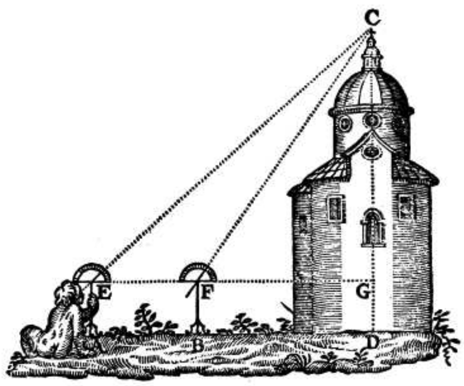
16. Para determinar a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ângulos α e β tendo a seguir medido $BC = h$. Determine a altura da chaminé.



17. O seguinte Problema, cuja resolução é apresentada na íntegra, aparece no livro "*Trigonometriae theorico-practicæ planae, et sphæricæ*", do autor Antonio Lechio, ano 1756, páginas 104 e 105:

Problema III (De praxis trigonometrica) *Distantiam inaccessam montis, vel turris per duas stationes mesiri.*

Resolutio. *Turris, seu tholi templi maximi altitudo sit* GC*; distantia* EG. *In ipsa linea distantiæ eligantur duæ stationes in E & F, quarum intervallum mechanice mensuretur, puta, pedium 500. Ad hoc præstandum requiritur planities ampla, & patens, ut accedere ad rem distantem, aut recedere ab ea tanto intervallo possis, quanto opus est. Eo autem certitor erit dimensio, quo intervallum fuerit majus, ut infra exponam.*



Semicirculus ad metiendos angulos altitudinis aptetur in utraque flatione, ut Fig.; & inveniantur altitudium anguli CFG, CEG, quibus subtractis a 90 gradibus, noti fiunt anguli complentes FCG, ECG. Posito ergo finu toto CG, erunt angulorum FCG, ECG tangentes GF, GE; ac proinde EF, intervallum stationum, est tangentium differentia. Fiat ergo:

Ut EF, differentia tangentium angulorum FCG, ECG complentium altitudinis angulos,

AD MAJOREM TANGENTEM EG;
ITA EF, STATIONUM INTERVALLUM, PEDUM 500,
AD DISTANTIÆ EG PEDES QUÆSITOS.

(a) Analisando o texto e a ilustração, procure traduzir o Problema e sua resolução.
Obs. Provavelmente seja necessário usar o google tradutor.

(b) Observe que este Problema trata de uma questão de obter uma medida inacessível, conhecendo-se certas medidas. Procure elaborar um tal problema prático, usando como base a figura do Problema original. Apresente a sua resolução.

18. Dados os arcos abaixo, obtenha a menor determinação, localizando em qual quadrante pertence, quantas voltas dá no ciclo trigonométrico e escreva sua expressão geral.

(a) $\widehat{AM} = 1290°$ (b) $\widehat{AT} = 23550°$ (c) $\widehat{AP} = -2170°$

19. Calcule o valor numérico das expressões:

(a) $y = \dfrac{4 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}}{\tan^2\dfrac{\pi}{6} - 1}$ (b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4} + \tan\dfrac{3\pi}{4}}{2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} - \tan 6\pi}$

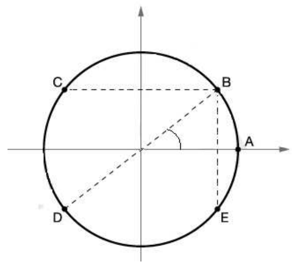
20. Localize, em ordem crescente no ciclo trigonométrico, os números:

(a) $\operatorname{sen} 40°$, $\operatorname{sen} 125°$, $\operatorname{sen} 244°$, $\operatorname{sen} 310°$.

(b) $\cos 48°$, $\cos 100°$, $\cos 200°$ e $\cos 300°$.

(c) $\tan 60°$, $\tan 120°$, $\tan 210°$ e $\tan 330°$.

21. Considere o arco $\widehat{AB} = 30°$. Determine, por simetria, os arcos $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AE}$ destacados no ciclo trigonométrico abaixo. Em seguida, determine os valores do seno, cosseno e tangente de cada um desses arcos.



22. Considere um polígono regular de n lados com medida de cada lado igual a ℓ, inscrito numa circunferência de raio R. Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos n triângulos isósceles.

(a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circnferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.

(b) Mostre que a área A_n do polígono regular de n lados pode ser determinada pela fórmula

$$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}.$$

(c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado ℓ, de um triângulo equilátero de lado ℓ e de um hexágono regular de lado ℓ.

(d) Considerando que $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.

23. No mesmo contexto do exercício anterior, mostre que a área A_n do polígono regular de n lados também é dada pela fórmula

$$A_n = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

O que vamos encontrar ao calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$? Que conclusão tiramos disso?

24. Dado $\gamma = 1380°$, determine o valor de $M = \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\gamma$.

25. Considere um polígono regular de n lados, $n \geq 3$, inscrito no ciclo trigonométrico.

(a) Mostre que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\ell_n}{2}$, onde ℓ_n denota a medida do lado do polígono regular de n lados inscrito no ciclo.

(b) Usando a igualdade acima, verifique os valores do seno de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$.

(c) Da Geomeria Plana, considerando um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio R, temos que a medida do lado do polígono de $2n$ lados, também inscrito na circunferência, é dado por

$$\ell_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2})}.$$

Dessa forma, determine o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

26. Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 2}$ dada por $x_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(a) Verifique que a sequência (x_n) é limitada.

(b) Faça um desenho no ciclo trigonométrico, justificando que essa sequência é decrescente.

(c) Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (**Obs.:** Este item é somente para quem já fez Cálculo II).

27. Determine o valor numérico de

(a) $y = \dfrac{\csc\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} - \sec\dfrac{\pi}{3}}$ (b) $y = \dfrac{\cot^2\dfrac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}}{\tan\dfrac{\pi}{3}\cdot\csc\dfrac{\pi}{6}}$

28. Usando da simetria no ciclo trigonométrico, determine os valores da cossecante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. Idem para a cotangente desses arcos.

29. Dado α um arco do primeiro quadrante, justifique que valem as seguintes relações complementares:

(a) $\csc(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sec\alpha$ (b) $\sec(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \csc\alpha$ (c) $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$

30. Determine os valores de x para os quais

(a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (b) $\sec\frac{2x}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (c) $\csc(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

31. Determine a expressão geral, em radianos, dos arcos x, para os quais:

(a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = 1.$ (b) $\sec\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) = -1.$

32. Determine todos os valores de x para os quais $\tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ não exista.

33. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais temos

(a) $\operatorname{sen} x = 3k - 2$ (b) $\cos x = \dfrac{k+1}{k-1}$

34. Quais são os valores de w que tornam possível a igualdade $\sec x = \dfrac{3-2w}{2}$?

35. Considerando α um arco do segundo quadrante e dado que $\csc\alpha = 5$, determine o valor dos demais números trigonométricos.

36. Sabendo que $\tan\alpha = \frac{12}{5}$, onde $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determine os demais números trigonométricos.

37. Ache os valores de x que verificam simultaneamente $\tan a = \dfrac{x+1}{2}$ e $\sec a = \sqrt{x+2}$.

38. Calcule o valor de $\cos x$, sabendo que $\cot x = \dfrac{2\sqrt{m}}{m-1}$, com $m > 1$.

39. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{1}{\csc x + \cot x} + \frac{1}{\csc x - \cot x}.$$

40. Calcule o valor de m para que $\operatorname{sen} x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.

41. (CEFET-PR) Se o ângulo α tem como expressão geral $EG = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, as raízes da equação

$$x^2 \operatorname{sen}\alpha + (\cos^2\alpha + 1)x + (\csc^2\alpha - 1) = 0$$

serão

(a) 1 e 0. (b) 1 e -1. (c) -1 e 0. (d) 0, 1 e -1. (e) $[-1, 1]$.

42. Simplifique a expressão, onde x é um arco do primeiro quadrante:

$$y = \frac{\sec(\frac{\pi}{2} - x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x)}{\csc x}.$$

43. Sendo x um arco do primeiro quadrante tal que $\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \tan x = 3$, determine o valor de $\cot x$.

44. Mostre que

(a) $\dfrac{\sec\alpha - \csc\alpha}{\sec\alpha + \csc\alpha} = \dfrac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}.$

(b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x.$

(c) $\dfrac{\cos a \cdot \cot a - \operatorname{sen} a \cdot \tan a}{\csc a - \sec a} = 1 + \operatorname{sen} a \cdot \cos a.$

(d) $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta.$

(e) $\dfrac{1 - 2 \cdot \cos^2 w}{\operatorname{sen} w \cdot \cos w} = \tan w - \cot w.$