Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de variáveis complexas
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Números Complexos

1. Explique o sofisma[1] $-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, portanto, $-1 = 1$.

2. Escrever na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:
(a) $(1+i)(1+i^3)(1+i)^{-1}$ (b) $3(7+2i) - ((5+4i)+1)i$
(c) $[(1-i)^3 + i^{157}](1+i)^{-1}$ (d) $\dfrac{i^{2000} - i^{47}}{1 - 3i^{579}} + \sqrt{-25}$
(e) $\dfrac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$ (f) $(1 + \sqrt{3}\, i)^3$

3. Se $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 - 2i$, calcule
(a) $|3z_1 + 4z_2|$ (b) $(\overline{z_1} - z_2 i)$ (c) $(z_1 \cdot z_2)^{-1}$

4. Demonstre que
   (a) o conjugado do conjugado de z é igual a z.
   (b) o conjugado da soma é igual à soma do conjugado.
   (c) o conjugado do produto é igual ao produto dos conjugados.

5. Se $z \neq 0$, calcule o conjugado de $\dfrac{1}{z}$.

6. Demonstre que $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ e que $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

7. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstre que, se w for raiz de $p(z) = 0$, então o conjugado de w também é raiz desta equação.

8. Dado o número complexo z, mostre que $\mathfrak{Re}\, z \leq |z|$ e que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

9. Usando o exercício anterior, prove a proposição a seguir: *"Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se*
   (a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
   (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$*"*

10. Prove que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|x + yi|$.

11. Prove que $|z|\sqrt{2} \geq |\mathfrak{Re}(z)| + |\mathfrak{Im}(z)|$

12. Dados os complexos z e w, prove que
$$\frac{|z+w|}{1+|z+w|} \leq \frac{|z|}{1+|z|} + \frac{|w|}{1+|w|}.$$

13. Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, ..., b_n$ números complexos. Prove a desigualdade a seguir, conhecida como *desigualdade de Schwarz*
$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \right).$$

14. Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz. Dizemos que A é uma *matriz complexa* se as entradas $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Definimos o complexo conjugado de A como sendo a matriz $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. Pela definição, uma matriz complexa A é *Hermitiana* quando
$$\overline{A} = A^T.$$

[1] sofisma é o mesmo que paradoxo.

(a) Ache a forma geral de uma matriz 2×2 Hermitiana.

(b) Determine as raízes do polinômio $P_2(t) = \det(A - tI)$. Mostre também que as raízes são reais.

15. A *representação matricial* de um número complexo $z = x+iy$ é a matriz $M(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$

Sejam z, w dois números complexos.

(a) Mostre que M é um homomorfismo do anel dos complexos no anel das matrizes 2×2.

(b) Mostre que $M(0) = 0_2$, onde 0_2 é a matriz nula 2×2.

(c) Calcule $M(i)$.

(d) Mostre que se $z \neq 0$, então $M(\frac{1}{z}) = [M(z)]^{-1}$.

16. Prove que o argumento do produto de dois números complexos é igual à soma dos argumentos. Em seguida, calcule o argumento de $i(1+i)$.

17. Representar na forma trigonométrica cada complexo a seguir:
(a) $z = -1 + i$ (b) $z = -1 - \sqrt{3}i$ (c) $z = -\sqrt{3} + i$ (d) $z = -i$ (e) $z = -\sqrt{3} - 3i$

18. Sejam z_1, z_2 e z_3 números complexos. Prove que a parte real do determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & z_1 & \overline{z}_1 \\ 1 & z_2 & \overline{z}_2 \\ 1 & z_3 & \overline{z}_3 \end{pmatrix}$$

é zero.

19. Calcule $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^6$ e $(1+i)^{2010}$.

20. Escreva sob a forma $a + bi$ cada complexo a seguir:

(a) $z = \sqrt{1-i}$ (b) $z = \sqrt[3]{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

(c) $z = (-2 - \sqrt{2}i)^{12}$ (d) $z = \sqrt[4]{1}$

21. Responda cada item abaixo.

(a) Sendo $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ o número de ouro, mostre que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

(b) Sabendo que $\cos 36° = \dfrac{\varphi}{2}$, determine o valor de $\tan 36°$.

(c) Mostre que o número complexo $z = -\varphi + \sqrt{3-\varphi}\, i$ na forma exponencial fica expresso por $z = 2e^{\frac{4\pi}{5}i}$.

(d) Usando a forma exponencial acima, determine as raízes cúbicas de z.

22. Resolva, em $\mathbb{C}$, cada equação a seguir:
(a) $z^4 = 3$ (b) $z^2 + z + 1 = 0$ (c) $z^8 - 14z^4 + 48 = 0$

23. Encontre os pontos $z = x + yi$ tais que
(a) $|z| \leq 2$ (b) $\mathfrak{Im} z > 0$ (c) $\mathfrak{Im}\dfrac{z-1}{z+1} \leq 1$ (d) $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \geq 2$ (e) $2 < \left|\dfrac{z-i}{i}\right| < 3$
Faça também uma representação geométrica em cada caso.

24. Prove que $e^{i\theta} = e^{i(2k\pi+\theta)}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

25. Se $z = 6e^{\frac{\pi}{3}\theta}$, calcule $|e^{iz}|$.

26. Encontre as raízes cúbicas de $-1 + i$. Localize-as no plano de Argand-Gauss e em seguida calcule a área do polígono com vértices nestes pontos.

27. Descreva e esboce o gráfico de cada uma das equações dadas a seguir:

(a) $|z - i| = 2$ (b) $|z + 2i| + |z - 2i| = 6$ (c) $|z - 3| - |z + 3| = 4$