Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 1 de Exercícios - Matrizes

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 4B - 2C$.

2. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz AB. Existe a matriz BA? Justifique.

3. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

4. É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

5. Mostre através de uma exemplo que na álgebra das matrizes, pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

6. Seja $A_{m\times m} = (a_{ij})_{m\times m}$ uma matriz quadrada. Definimos o *traço* de A, e escrevemos $tr(A)$, como a soma dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{mm}.$$

Mostre que $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$, onde A e B são matrizes $m \times m$.

7. **(Sel. Mestrado UFRGS 2006/2)** Se M é uma matriz $n \times n$ com elementos $\{m_{ij}\}_{1\le i,j\le n}$, definimos o seu *traço* por meio da expressão $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

   (a) Se A e B são matrizes $n \times n$, então prove que $tr(AB) = tr(BA)$.

   (b) Se I é a matriz identidade $n \times n$, então mostre que não existem matrizes A e B tais que $AB - BA = I$.

8. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ matrizes triangulares superiores. Mostre que AB é uma matriz triangular superior com diagonal $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$, ..., $a_{nn}b_{nn}$.

9. Dê um exemplo de duas matrizes A e B de mesmo tamanho tais que

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

10. É verdade, de modo geral, que $(A+B)^2 = A^2 + 2A\cdot B + B^2$, onde A e B são matrizes?

11. Para cada número real α, considere a matriz

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

    (a) Mostre que $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

    (b) Mostre que $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$.

12. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes AA^t e A^tA, se existirem.

13. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $A^t = A$, encontre o valor de x.

14. Mostre que, se A for uma matriz inversível, então A^t também é inversível, com $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

15. Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível, verifique que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

16. Suponha que A seja uma matriz invertível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

17. Dadas duas matrizes simétricas $n \times n$ A e B.

    (a) Prove que $A + B$ é simétrica.

    (b) Prove que se $AB = BA$, então AB é simétrica.

18. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se

$$A^2 = A.$$

    De acordo com a definição acima

    (a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.

    (b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

19. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Nos itens abaixo, considere A, B, K e I matrizes $n \times n$, onde I é a matriz identidade.

    (a) Seja K uma matriz anti-simétrica, isto é, $K^t = -K$. Suponha que $I - K$ é não-singular[1]. Mostre que $(I + K)$ é não-singular. Se $B = (I+K)(I-K)^{-1}$, mostre que $B^tB = BB^t = I$.

    (b) Mostre que se A, B e $A + B$ possuem inversas, então o mesmo acontece com $(A^{-1} + B^{-1})$ e $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

[1]Matriz não-singular é um sinônimo para matriz inversível.