Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Terceira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 13/12/2019

Questão 01. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Prove que X é um aberto de M se, e somente se, $X \cap \partial X$ for um conjunto vazio.

Questão 02. Determine $\text{int}(\mathbb{Q})$, $\partial\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ em relação ao conjunto (justifique suas respostas):

(a) dos números reais $\mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

(b) dos números racionais $\mathbb{Q}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

Questão 03. A função *seno hiperbólico* de um arco $x \in \mathbb{R}$ é definida por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

(a) Prove que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(b) Represente a função inversa $x = \operatorname{arcsenh} y$ em termos de logaritmos.

(c) Com a representação obtida em (b), calcule o limite $\lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \operatorname{arcsenh} y$.

Questão 04. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = L.$$

Questão 05. Prove que a função $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x}$ é contínua em todo o seu domínio.

Questão 06. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) f é uniformemente contínua;

(ii) se $x_n, y_n \in I$ são tais que $x_n - y_n \to 0$, então $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Questão 07. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Questão 08. Responda cada um dos itens a seguir (eles são independentes)

(a) Prove que se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função de Lipschitz, então f é uniformemente contínua.

(b) Verifique que a recíproca do item (a) em geral é falsa, considerando a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são limitadas e de Lipschitz, mostre que $f \cdot g$ também é de Lipschitz.