GABARITO. — PARTE 1 —

01) (a) Se $A \subset B$, defina $f: A \to B$ por $f(x) = x$.
Claramente, f é injetiva. Portanto, $\text{card}\, A \leq \text{card}\, B$. 0,5
Para o exemplo: tome $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{R}$.
Obviamente,

$$A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R} = B, \quad \text{mas}$$

$$\text{card}\, A = \text{card}\, \mathbb{N} = \aleph_0 < c = \text{card}\, \mathbb{R} = \text{card}\, B. \quad 0{,}5$$

(b) Sendo $A \subset B$ e B enumerável, como $f: A \to B$, $f(x) = x$ é injetiva, sendo 0,5
B enumerável, por teorema segue que A é enumerável.

---

02) (a) Seja X o conj. de todas as sequências infinitas contendo somente 0 e 1 como dígitos.
Por absurdo, suponha que X é enumerável.
Então, existe uma lista infinita

$$X = \{(x_1), (x_2), (x_3), \dots\}, \text{ onde}$$

$$(x_1) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots),$$
$$(x_2) = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots),$$
$$(x_3) = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots),$$
$$\vdots$$

1,0

onde $a_{ij} = 0$ ou 1, $\forall i, \forall j$.

01

Como estamos supondo que X é enumerável, então, qualquer seq. de zeros e uns estará na lista descrita acima.

Vamos considerar a seguinte sequência:

$$(y) = (b_1, b_2, b_3, \dots), \text{ onde}$$

$b_i = 0$ ou 1, $\forall i$. Sendo X enumerável, então $(y) \in X$. Mas vamos considerá-lo como segue:

$$b_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } a_{11} = 0 \\ 0, & \text{se } a_{11} = 1 \end{cases}$$

$$b_2 = \begin{cases} 1, & \text{se } a_{22} = 0 \\ 0, & \text{se } a_{22} = 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$b_j = \begin{cases} 1, & \text{se } a_{jj} = 0 \\ 0, & \text{se } a_{jj} = 1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Dessa maneira, por construção, temos que

- $(y) \neq (x_1)$, pois $b_1 \neq a_{11}$;
- $(y) \neq (x_2)$, pois $b_2 \neq a_{22}$; et cetera.

Mas então, $(y) \notin X$; o que é um absurdo.

Logo, X é não-enumerável.

(b). Basta notar que

$$X = \left\{ \frac{p}{37} : p, q \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q},$$

e como $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue pelo exercício anterior, item (b), que X é enumerável.

---

03) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon.$$

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{\ln(n+1)} \right| = \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Como $\ln$ é crescente, $n < n+1 \Rightarrow$

$$\ln(n) < \ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n}.$$

NM

Tome $n_0 > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$. Então, $\forall n \geq n_0$, tem-se que $\ln n \geq \ln n_0 \Rightarrow \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n_0}$

E, como $n_0 > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \Rightarrow \ln n_0 > \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln n_0} < \varepsilon$$

e então:

$$|x_n - 0| = \frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n_0} < \varepsilon.$$

03

Ou seja, mostramos que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (toma-se $n_0 > e^{\frac{1}{\varepsilon}}$) tal que

$$|x_n - 0| < \varepsilon,$$

ou seja, $x_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \to 0$. $\square$

---

04) $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall x \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(i) $n = 1$:

$(1+x)^1 \geq 1 + x$ ok! Logo, vale a base da indução.

(ii) Suponha a desigualdade válida para $n = k$, i.e.; que $(1+x)^k \geq 1 + kx$.

Precisamos mostrar que vale para $n = k+1$, ou seja, que vale $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\cdot x$.

1,0

De fato;

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{\geq 1+kx} \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$= 1 + x + kx + kx^2 = 1 + (k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (k+1)x.$$

04

Logo, vale (ii)

Logo, por (i) e (ii) segue o resultado por indução.

2ª parte: para $r>1$, escreva $r=1+p$, onde $p>0$.

Mostremos que $r^n \to +\infty$.

Dado $M>0$, precisamos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n = r^n > M, \quad \forall n \geq n_0.$$

Note que:

$$x_n = r^n = (1+p)^n \geq 1+np > np.$$

DESIGUALD. BERNOULLI

Assim, tome $n_0 > \frac{M}{p}$. Disso, $\forall n \geq n_0$, teremos $np \geq n_0 \cdot p$, e disso,

$$x_n = r^n > np \geq n_0 p > \frac{M}{p} \cdot p = M, \quad \forall n \geq n_0,$$

Ou seja, $r^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

$\square$

05) $x_n \to 0$ e (y_n) limitada.

Mostrar: $x_n \cdot y_n \to 0$.

Como (y_n) é limitada, então $\exists M > 0$ tal que

$$|y_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $\varepsilon > 0$. Como $x_n \to 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

tal que, $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

1.0

Então, $\forall n \geq n_0$, teremos:

$$|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \cdot y_n = 0$.

---

06) $x_n = \operatorname{sen} n$ é tal que

$|x_n| = |\operatorname{sen} n| \leq 1$, ou seja, é limitada.

Portanto, pelo T. de Bolzano-Weierstrass, segue que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n), convergente.

0,5

07) $0<r<1$. $\quad |x_{n+1}-x_n|<r^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(a) Dado $\varepsilon>0$. Precisamos achar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que, $\forall m,n\geq n_0 \Rightarrow |x_m-x_n|<\varepsilon$.

Tome $m>n$. Então, $\exists p\in\mathbb{N}$ tal que $m=n+p$.

Então:

$$|x_m-x_n| = |x_{n+p}-x_n| =$$

$$= |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-x_{n+p-2}+\dots+x_{n+1}-x_n| \leq$$

$$\leq |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\dots+|x_{n+1}-x_n| <$$

$$< r^{n+p-1}+r^{n+p-2}+\dots+r^n =$$

$$= r^n\cdot\underbrace{(r^{p-1}+r^{p-2}+\dots+1)}$$

P.G. FINITA COM $p-1+1=p$ TERMOS, DE RAZÃO $q=\frac{1}{r}>1$.

$$S_p = \frac{a_1\cdot(q^p-1)}{q-1} = \frac{r^{p-1}\cdot\left(\left(\frac{1}{r}\right)^p-1\right)}{\frac{1}{r}-1} =$$

$$= \frac{r^{p-1}\cdot(r^{-p}-1)}{\frac{1-r}{r}} = \frac{r^{-1}-r^{p-1}}{1}\cdot\frac{r}{1-r}$$

$$= \frac{1-r^p}{1-r} = \frac{1}{1-r}-\frac{r^p}{1-r}$$

Logo:

$$|x_m - x_n| < r^n \cdot (r^{p-1} + r^{p-2} + \cdots + 1) =$$

$$= r^n \cdot \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^p}{1-r} \right)$$

$$= \frac{r^n}{1-r} - \frac{r^{n+p}}{1-r} < \frac{r^n}{1-r}.$$

Então, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow r^n \leq r^{n_0}$.

Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon$. Disso;

$$|x_m - x_n| < \frac{r^n}{1-r} \leq \frac{r^{n_0}}{1-r} < \varepsilon, \quad \text{i.e.;}$$

(x_n) é de Cauchy.

(b) Note que:

$$|x_{n-1} - x_n| = \left| \cancel{1} + \frac{1}{2x_n} - \left(1 + \frac{1}{2x_{n-1}}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2x_n} - \frac{1}{2x_{n-1}} \right| = \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}} \right) \right|$$

2c

$$= \frac{1}{2} \left| \frac{x_{n-1} - x_n}{x_n \cdot x_{n-1}} \right|.$$

Como $x_n = 1 + \frac{1}{2x_{n-1}}$, $\forall n \Rightarrow x_n > 1$, $\forall n$.

Assim, $x_n \cdot x_{n-1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|x_n \cdot x_{n-1}|} < 1$.

Com isso:

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x_{n-1} - x_n|}{|x_n \cdot x_{n-1}|} < \frac{1}{2} \cdot |x_{n-1} - x_n|$$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot |x_{n-1} - x_{n-2}| < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot |x_{n-2} - x_{n-3}|$$

$$< \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |x_2 - x_1|$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \left|\cancel{1} + \frac{1}{2-1} - \cancel{1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\Rightarrow |x_{n-1} - x_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, onde $0 < \frac{1}{2} = r < 1$.

Logo, a seq. dada é de Cauchy. Portanto, é convergente. Assim, $\exists\ L = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Pela def. recursiva, vem:

$$\underset{\swarrow\ L}{x_{n+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2x_n}}_{\searrow\ 1 + \frac{1}{2L}}$$

$$L = 1 + \frac{1}{2L}$$

$$2L^2 = 2L + 1$$

$$2L^2 - 2L - 1 = 0$$

$$L = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$$

$$L = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \begin{cases} \nearrow L = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \searrow L = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \ \times \end{cases}$$

Como $x_n > 0$, $\forall n$, temos que $x_n \to \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

08) : Sejam (x_n) e (y_n) de Cauchy.

Portanto, (x_n) e (y_n) são limitadas, i.e.,

$\exists M_1, M_2 > 0$ tais que $|x_n| \leq M_1$ e $|y_n| \leq M_2$,

$\forall n \in \mathbb{N}$. Tomando $M = \text{máx.}\{M_1, M_2\} > 0$, então

$$|x_n| \leq M \quad e \quad |y_n| \leq M.$$

Dado $\varepsilon > 0$.

Como (x_n) é de Cauchy, então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall m, n \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (*)$$

Como (y_n) é de Cauchy, então, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall m, n \geq n_1 \Rightarrow |y_m - y_n| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (**)$$

Tome $\tilde{n} = \text{máx.}\{n_0, n_1\}$. Assim, $\forall n \geq \tilde{n}$, valem $(*)$ e $(**)$. Disso: $\forall m, n \geq \tilde{n}$, temos:

$$|x_m y_m - x_n y_n| = |x_m y_m - x_m y_n + x_m y_n - x_n y_n|$$

$$\leq |x_m (y_m - y_n)| + |y_n (x_m - x_n)| =$$

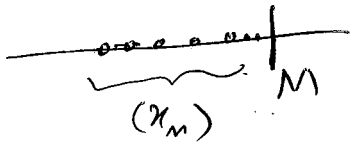
$$= \underbrace{|x_m|}_{\leq M} \cdot \underbrace{|y_m - y_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} + \underbrace{|y_n|}_{\leq M} \cdot \underbrace{|x_m - x_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Portanto, provamos que, para $\varepsilon > 0$ dado, $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq \tilde{n} \Rightarrow |x_m y_m - x_n y_n| < \varepsilon$,

ou seja, a seq. $(x_n y_n)$ também é de Cauchy.

29) Como (x_n) é limitada, então existe

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$$



Suponha que $M \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que

$$M - \frac{1}{n} < x_k \leq M \quad \text{, ou seja,} \qquad (*)$$

$M - \frac{1}{n}$ não serve como cota superior para o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, pois senão M não seria o supremo.

Assim, temos que: (devido a $(*)$)

- para $n = 1$, $\exists\, n_1 \geq 1$ tal que

$$M \geq x_{n_1} > M - 1.$$

- para $n = 2$, $\exists\, n_2 > n_1$ tal que

$$M \geq x_{n_2} > M - \frac{1}{2}$$

- para $n = 3$, $\exists\, n_3 > n_2$ tal que

$$M \geq x_{n_3} > M - \frac{1}{3}.$$

$\vdots$

- para $n = k$, $\exists\, n_k > n_{k-1}$ tal que

$$M \geq x_{n_k} > M - \frac{1}{k}$$

$\vdots$

Ou seja, seguindo indutivamente, construímos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$M - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq M \quad , \quad \forall n_k .$$

Passando o limite com $k \to \infty$, pelo Teorema do Sanduíche para sequências, segue que

$$\left.\begin{array}{l} M - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq M \\ \quad \swarrow \qquad\qquad \searrow \\ M \qquad\qquad\qquad M \end{array}\right\} \Rightarrow x_{n_k} \longrightarrow M$$

$\square$

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I - Parte 1[1]
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 07/11/2019

Questão 01. Sejam A e B dois conjuntos não vazios tais que $A \subset B$.

(a) Mostre que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$. Dê um exemplo para mostrar que vale a desigualdade estrita.

(b) Adicionando-se a hipótese de que B é enumerável mostre que A também é enumerável.

Questão 02. Decida se cada conjunto a seguir é enumerável ou não enumerável, justificando:

(a) O conjunto de todas as sequências infinitas formadas apenas pelos dígitos 0 e 1.

(b) O conjunto $X = \left\{ \dfrac{p}{3^q} \,:\, p, q \in \mathbb{N} \right\}$ [Dica: use a questão anterior para ajudar]

Questão 03. Use a definição de limite para provar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$.

Questão 04. Usando o Princípio da indução Matemática, prove a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com esta desigualdade, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ para $r > 1$.

Questão 05. Sejam (x_n) uma sequência tal que $x_n \to 0$ e (y_n) uma sequência limitada. Prove que

$$x_n \cdot y_n \to 0.$$

Questão 06. A sequência (x_n) dada por $x_n = \operatorname{sen} n$ possui subsequência convergente? Justifique.

Questão 07. Sejam $0 < r < 1$ e (x_n) uma sequência tais que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que a sequência (x_n) satisfazendo as hipóteses acima é de Cauchy.

(b) Mostre que a sequência (x_n) definida recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2x_n} \end{cases}$$

satisfaz as hipóteses do problema, sendo portanto convergente. Em seguida, calcule o seu limite.

Questão 08. Se (x_n) e (y_n) forem duas sequências de Cauchy, use a definição de sequência de Cauchy para provar que $(x_n y_n)$ é também de Cauchy.

Questão 09. Seja (x_n) uma sequência limitada e seja $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Mostre que se $M \notin \{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to M$.

[1] A Parte 1 é para ser feita em aula e vale 60% da nota da Segunda avaliação, e a Parte 2 é para ser feita em casa e vale 40% a nota da Segunda avaliação.

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I - Parte 2
(para ser entregue no dia 12/11/2019)
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 07/11/2019

Questão 10. A sequência de Fibonacci (a_n) é definida indutivamente por

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \text{ para } n \geq 1 \end{cases}.$$

Seja $x_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Prove que:

(a) $a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n \cdot a_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(-1)^n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$.

(c) $x_1 > x_3 > x_5 > ... > x_{2n+1} > x_{2n} > ... > x_6 > x_4 > x_2$. (Sugestão: verifique antes que $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = \frac{1}{1+x}$)

(d) Justifique que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

(e) Justifique que c é a raiz positiva da equação $f(x) = x$ e que c é o número de ouro

$$c = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}$$