Capítulo 8

Continuidade

Neste capítulo apresentamos os importantes conceitos de continuidade e continuidade uniforme.

8.1 Continuidade

Definição 8.1 Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *contínua* no ponto $a \in X$ se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ escolhido, existir um $\delta > 0$, tal que $\forall x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$, implicar em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Uma maneira de escrever a definição acima é em termos de bolas abertas: $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,\text{tal que}\, \forall x \in X \,:\, x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Note na definição acima que para f ser contínua em um ponto, é necessário que este ponto pertença ao domínio da f.

Definição 8.2 Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio X.

Mais precisamente, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em X se, e somente se,

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,:\, \forall y \in X,\ |x - y| < \delta \,\Rightarrow\, |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

A grosso modo, uma função f é contínua em seu domínio se, dados quaisquer dois pontos do seu domínio, muito próximos (a menos de δ), suas imagens mediante f continuarão também, muito próximas (a menos de ε).

Quando uma função não for contínua em um ponto dizemos que a mesma é *descontínua* no referido ponto.

Definição 8.3 Dizemos que um ponto $a \in X \subset \mathbb{R}$ é um *ponto isolado* do conjunto X se $\exists \delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta) = \{a\}$. Ou seja, a é um ponto isolado de X se existir um intervalo aberto, centrado em a, cuja intersecção com X é somente o ponto a.

Observe que se X for um conjunto de pontos isolados (ou seja, se $a \in X$ mas $a \notin X'$), então, **toda** função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua. De fato, por exemplo, considere $X = \mathbb{Z}$. É óbvio que todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados. Assim, tomando $\varepsilon > 0$ qualquer, temos que, se $\forall a \in \mathbb{Z}$, $|x - a| < \delta < 1$, então $x = a$ e daí, $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Ou seja, f é contínua, independentemente de como é dada a expressão que a define. Isto aconteceu porque neste caso X é formado apenas por pontos isolados.

Se $a \in X \cap X'$ (ou seja, a também for um ponto de acumulação do conjunto X), então a noção de continuidade reduz-se à de limite, ou seja, segue imediatamente da definição de função contínua o resultado abaixo:

Proposição 8.4 *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in X \cap X'$ se, e somente se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo 1. Verifique se a função abaixo é contínua em $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 3x + 6, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Solução. Primeiramente, perceba que $f(2) = 4$.

Agora precisamos ver se $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$. Para responder a isto, precisaremos recorrer aos limites laterais:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{0}$.
  Como resultou em uma indeterminação, vamos removê-la mediante uma simplificação, fatorando o numerador:
  $$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} x+2 = 4$$
  Portanto, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - 3x + 6 = (2)^2 - 3(2) + 6 = 4 - 6 + 6 = 4$.
  Portanto, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

Logo, $\exists \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$, e com isto, concluímos que f é contínua no ponto $x = 2$.

Teorema 8.5 *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. São equivalentes as afirmações:*

(i) *f é contínua em a;*

(ii) *$\forall (x_n) \subset X$, tal que $x_n \to a$, implica em $f(x_n) \to f(a)$.*

Demonstração.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Suponha que f é contínua em a.

Suponha também que toda sequência $(x_n) \subset X$ é tal que $x_n \to a$.

Vamos mostrar que $f(x_n) \to f(a)$.

Dado $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de f no ponto a segue que $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x \in X$ com $|x - a| < \delta$, implica em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Como $x_n \to a$, para o $\delta > 0$ acima, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, tem-se $|x_n - a| < \delta$.

Mas como $|x_n - a| < \delta$, $\forall n \geq n_0$, pela continuidade de f em a segue que

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon,$$

ou seja, $f(x_n) \to f(a)$, provando assim (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Suponha que para toda sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n \to a$, vale que $f(x_n) \to f(a)$.

Por absurdo, suponha que f não seja contínua em a. Assim, temos que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall \delta > 0$, $\exists x \in X$ tal que

$$|x - a| < \delta, \text{ mas } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, temos que $\exists x_n \in X$ tal que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon_0.$$

Logo, $x_n \to 0$ mas $f(x_n) \not\to f(a)$, uma contradição com a hipótese inicial. Logo f é contínua no ponto a, provando assim (i).

$\square$

Teorema 8.6 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(X) \subset Y$, com f contínua em $a \in X$ e g contínua em $b = f(a)$. Então, $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a.*

Obs.: Este Teorema nos diz que composição de funções contínuas é uma função contínua.

Demonstração. Usaremos o Teorema 8.5 para a prova. Seja $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to a$. Como f é contínua em a segue que $f(x_n) \to f(a)$.

Como g é contínua em $b = f(a)$, e $(f(x_n))_n \subset Y$ é tal que $f(x_n) \to f(a) = b$, então

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)) = g(b),$$

i.e.,

$$(g \circ f)(x_n) \to g(b),$$

ou seja, g é contínua no ponto b.

$\square$

Teorema 8.7 *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Então, as funções $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ também são contínuas.*

Demonstração. As demonstrações são parecidas com o que fizemos ao estudar as propriedades operatórias dos limites. Por isto, faremos aqui apenas a prova da continuidade da soma $f + g$.

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Dado $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$. Pela continuidade de f temos que $\exists\, \delta_1 > 0$ tal que, $\forall y \in X$, $|x - y| < \delta_1$, implica em $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Também, pela continuidade de g segue que $\exists\, \delta_2 > 0$ tal que, $\forall y \in X$, $|x - y| < \delta_2$, implica em $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Assim, para este $\delta > 0$ valem $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, $\forall\, y \in X$ tal que $|x - y| < \delta$ temos

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| =$$

$$= |(f(x) - f(y)) + (g(x) - g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, dados $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, mostramos que $\exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in X$, $|x - y| < \delta$, implica em $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon$, ou seja, $f + g$ é contínua em todo o seu domínio X, visto que o ponto x era qualquer em X.

□

Definição 8.8 Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que uma descontinuidade em um ponto $a \in \mathbb{X}$ é de *primeira espécie* quando existirem os limites laterais em a mas forem distintos. Caso contrário, a descontinuidade é chamada de *segunda espécie*.

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{, se } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } \ x = 0 \end{cases}$$

é descontínua no ponto 0 e a descontinuidade é de primeira espécie pois existem os limites laterais em 0 e são distintos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \ \text{ e } \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

8.2 Exemplos de funções contínuas

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de funções contínuas, provadas pela definição.

Exemplo 1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ é contínua em toda a reta.

Solução. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$. Precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$ com $|x - a| < \delta$, implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Suponha termos obtido o $\delta > 0$. Assim, vamos avaliar $|f(x) - f(a)|$:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a| \cdot |x + a|.$$

Escreva $|x + a| = |x - a + 2a| \leq |x - a| + 2|a|$, e então

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|(|x - a| + 2|a|),$$

e se $|x-a|<\delta$, então

$$|f(x)-f(a)|<\delta(\delta+2|a|).$$

Logo, como devemos ter $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, basta escolher $\delta>0$ tal que

$$\delta(\delta+2|a|)=\varepsilon,$$

e então, completando um quadrado perfeito, vamos obter

$$\delta^2+2|a|\delta+|a|^2-|a|^2=\varepsilon,$$

i.e.,

$$(\delta+|a|)^2=\varepsilon+|a|^2,$$

donde segue que

$$\delta=\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|>0.$$

Ou seja, $\forall\varepsilon>0$, obtemos $\delta>0$ (a saber: $\delta=\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|$), tal que, $\forall x\in\mathbb{R}$ tal que $|x-a|<\delta$, implica em

$$|f(x)-f(a)|<\delta(\delta+2|a|)=(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|)(\sqrt{\varepsilon+|a|^2}-|a|+2|a|)=\varepsilon,$$

provando que $f(x)=x^2$ é contínua em a, e como $a\in\mathbb{R}$ é qualquer, segue que f é contínua em toda a reta.

$\square$

Exemplo 2. Prove que $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sqrt{1-x}$ é contínua em todo o seu domínio.

Solução. Dado $a\in(-\infty,1)$. Dado $\varepsilon>0$, precisamos achar $\delta>0$ tal que, $\forall x\in(-\infty,1)$ tal que $|x-a|<\delta$, implique em $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Suponha já encontrado o tal $\delta>0$. Então, avaliando $|f(x)-f(a)|$, vamos obter:

$$|f(x)-f(a)|=|\sqrt{1-x}-\sqrt{1-a}|=\left|(\sqrt{1-x}-\sqrt{1-a})\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}}\right|=$$

$$= \frac{|1-x-(x-a)|}{|\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} = \frac{|x-a|}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} < \frac{\delta}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}},$$

e como $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a} > \sqrt{1-a}$, segue que

$$|f(x)-f(a)| < \frac{\delta}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-a}} < \frac{\delta}{\sqrt{1-a}},$$

e como queremos que fique menor do que ε, basta nomear $\varepsilon = \frac{\delta}{\sqrt{1-a}}$, e então basta tomar $\delta = \varepsilon\sqrt{1-a}$, e daí tem-se

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon,$$

sempre que $|x-a| < \delta$, ou seja, f é contínua em a, e pela arbitrariedade de a, segue que f é contínua em todo o seu domínio.

□

Exemplo 3. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em toda a reta real.

Solução. Dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, precisammos achar $\delta > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \delta$ implique em $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Suponha que tenhamos encontrado o $\delta > 0$. Assim, avaliando a diferença $|f(x)-f(a)|$, e lembrando da Trigonometria a fórmula

$$\operatorname{sen} p = \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2},$$

vamos obter

$$|f(x)-f(a)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a| = \left|2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2} \cdot \cos\frac{x+a}{2}\right| =$$

$$= 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right|.$$

Como $|\cos w| \leq 1$, $\forall w \in \mathbb{R}$ e $|\operatorname{sen}\theta| \leq |\theta|$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$|f(x)-f(a)| = 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| \cdot 1 = |x-a| < \delta,$$

e então basta escolher $\delta = \varepsilon$, e então

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

sempre que $|x - a| < \delta$, ou seja, f é contínua no ponto a. E como $a \in \mathbb{R}$ é qualquer, segue que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é contínua em toda a reta real.

$\square$

Exemplo 4. A função $h : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \operatorname{sen}\sqrt{1-x}$ é contínua em todo o seu domínio, pois conforme o Teorema 8.6 temos $h = g \circ f$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x}$ foram mostradas acima que são contínuas.

Exemplo 5. Prove que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$ é contínua em seu domínio.

Solução. Dado $a \in (0, +\infty)$, i.e., $a > 0$, vamos mostrar que $\lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a$. Isso provará que f é contínua em a. Observe ainda que, conforme o estudo de limites laterais, é suficiente mostrar que

$$\lim_{x \to a^+} \ln x = \ln a \text{ e que } \lim_{x \to a^-} \ln x = \ln a.$$

(a) Prova de $\lim\limits_{x \to a^+} \ln x = \ln a$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x > 0$ tal que $a < x < a + \delta$, implique em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$.

Vamos estimar $|\ln x - \ln a|$: usando de propriedade operatória dos logaritmos, temos

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}|$$

Como neste caso $x > a$, temos que $\frac{x}{a} > 1$ (lembre que $a > 0$) e daí

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}| = \ln \frac{x}{a},$$

Agora, observe que, neste caso, como $x < a + \delta$, segue que $\frac{x}{a} < \frac{a+\delta}{a}$, e como $f(x) = \ln x$ é uma função crescente, concluímos que

$$|\ln x - \ln a| = \ln \frac{x}{a} < \ln \frac{a+\delta}{a}.$$

Como a estimativa acima deve ser controlada por ε, se escrevermos $\varepsilon = \ln \frac{a+\delta}{a}$, isolando δ obtemos $\delta = a(e^{\varepsilon} - 1)$, como desejado (note que tal δ depende da escolha do ε).

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, conseguimos encontrar $\delta > 0$ (mais precisamente, $\delta = a(e^{\varepsilon} - 1)$), tal que $\forall x$ tal que $a < x < a + \delta$, implica em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$, ou seja, provamos que

$$\lim_{x \to a^+} \ln x = \ln a. \tag{8.1}$$

(b) Prova de $\lim\limits_{x \to a^-} \ln x = \ln a$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x > 0$ tal que $a - \delta < x < a$, implique em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$.

Vamos estimar $|\ln x - \ln a|$: usando de propriedade operatória dos logaritmos, temos

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}|$$

Como neste caso $0 < x < a$, temos que $0 < \frac{x}{a} < 1$ (lembre que $a > 0$) e daí

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}| = -\ln \frac{x}{a},$$

Agora, observe que, neste caso, como $x > a - \delta$, segue que $\frac{x}{a} > \frac{a-\delta}{a}$, e como $g(x) = -\ln x$ é uma função decrescente, concluímos que

$$|\ln x - \ln a| = -\ln \frac{x}{a} < -\ln \frac{a-\delta}{a}.$$

Como a estimativa acima deve ser controlada por ε, se escrevermos $\varepsilon = -\ln \frac{a-\delta}{a}$, isolando δ obtemos $\delta = \frac{a(e^{\varepsilon}-1)}{e^{\varepsilon}}$, como desejado (note que tal δ depende da escolha do ε).

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, conseguimos encontrar $\delta > 0$ (mais precisamente, $\delta = \frac{a(e^{\varepsilon}-1)}{e^{\varepsilon}}$), tal que $\forall x$ tal que $a - \delta < x < a$, implica em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$, ou seja, provamos que

$$\lim_{x \to a^-} \ln x = \ln a. \tag{8.2}$$

Portanto, por (8.1) e (8.2) concluímos que

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a,$$

ou seja, $f(x) = \ln x$ é contínua no ponto $a > 0$. Como $a \in (0, +\infty)$ é qualquer, pela sua arbitrariedade segue que f é contínua em todo o seu domínio, com queríamos mostrar.

$\square$

Exemplo 06. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, se } \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, se } \ x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Mostremos que f é descontínua em todo ponto do seu domínio.

De fato, dado $a \in \mathbb{R}$ qualquer. Então $a \in \mathbb{Q}$ ou $a \in \mathbb{I}$.

Tome $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$.

- Se $a \in \mathbb{Q}$, então, pela densidade dos irracionais em $\mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in \mathbb{I}$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| = |0 - 1| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$, i.e., f não é contínua em $a \in \mathbb{Q}$.
- Se $a \in \mathbb{I}$, então, pela densidade dos racionais em $\mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| = |1 - 0| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$, i.e., f não é contínua em $a \in \mathbb{I}$.

Ou seja, f não é contínua em nenhum ponto do seu domínio.

Exercícios

1. Prove que a função $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1 - x}$ é contínua em todo o seu domínio.
2. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é contínua.
   (Sugestão: $|a^x - a^b| = a^b |a^{x-b} - 1|$)

3. Mostre que a função real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

4. Mostre que toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua.

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2003/2)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional **não** é contínua em nenhum ponto.

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que

$$|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Prove que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. (**Sugestão:** Use o Teorema de Bolzano-Weierstrass).

7. **(Sel. Mestr. UFSM 2011/1)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula.

8. Uma função f é dita ser *simetricamente contínua* em um ponto x se

$$\lim_{h \to 0} [f(x + h) - f(x - h)] = 0.$$

Mostre que se f é contínua em um ponto, então é simetricamente contínua no ponto, mas que a recíproca não é verdadeira.

8.3 Funções contínuas em intervalos

Teorema 8.9 *(Teorema do valor intermediário - T.V.I) Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $a, b \in I$ tais que $f(a) < d < f(b)$. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ entre a e b tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e $a, b \in I$. Sem perda de generalidade, assuma que $a < b$. Como $f(a) < d < f(b)$, temos que $f(a) \neq f(b)$.

Defina o conjunto $X = \{x \in [a, b] \,:\, f(x) < d\}$.

Temos que $X \neq \emptyset$ pois $a \in X$, já que $f(a) < d$. Logo, X está bem definido.

Note que X é limitado superiormente pois b é uma cota superior para X, visto que

$$f(b) > d > f(x), \forall x \in X.$$

Logo, existe $\sup X := c$.

Afirmamos que $f(c) = d$. De fato, como $c = \sup X$, então,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in X \text{ tal que } c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Então, pelo Teorema do Sanduíche para sequências temos que $x_n \to c$. E, como f é contínua, segue que

$$f(x_n) \to f(c). \tag{8.3}$$

Mas como $x_n \in X, \forall n$, então

$$f(x_n) < d, \forall n. \tag{8.4}$$

De (8.3) e (8.4) concluímos que

$$f(c) \leq d. \tag{8.5}$$

Para chegarmos na igualdade desejada, resta mostrar a desigualdade contrária. De fato, por outro lado,

$$c + \frac{1}{n} > c = \sup X \Rightarrow c + \frac{1}{n} \notin X,$$

então

$$f(c + \frac{1}{n}) \geq d, \forall n. \tag{8.6}$$

Mas, pela continuidade de f, temos

$$c + \frac{1}{n} \to c \Rightarrow f(c + \frac{1}{n}) \to f(c), \tag{8.7}$$

e, por (8.6) e (8.7), concluímos que

$$f(c) \geq d. \tag{8.8}$$

De (8.5) e (8.8) segue o resultado.

□

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1. Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais possui uma raiz real.

Solução. Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, com $a_n \neq 0$ e n ímpar. Considere $a_n > 0$ (o caso $a_n < 0$ é análogo). Assim, temos que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_0}{x^n}\right) = +\infty,$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^n \left(a_n + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_0}{x^n}\right) = -\infty.$

Portanto, temos

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty,$$

e então para $N = 1$, $\exists A > 0$ tal que, $\forall x \geq A$, implica em $p(x) > 1$, e

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty,$$

e então para $N = -1$, $\exists B > 0$ tal que, $\forall x \leq B$, implica em $p(x) \leq -1$.

Logo,

$$p(B) \leq -1 < 0 < 1 \leq p(A),$$

e como $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ é contínua, pelo Teorema do valor intermediário (T.V.I) segue que existe c entre A e B tal que $f(c) = 0$, ou seja, $p(x)$ tem uma raiz real.

Corolário 8.10 *A imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua e $J \subset I$, onde J é um intervalo.

Seja $f(J) = \{f(x) : x \in J\}$ o conjunto imagem de J por f. A mostrar: $f(J)$ é um intervalo.

Dados $y_1, y_2 \in f(J)$. Suponha que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 < y < y_2$. Para mostrar que $f(J)$ é um intervalo, basta mostrar que $y \in f(J)$.

Como $y_1, y_2 \in f(J)$, segue que existem $x_1, x_2 \in J$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Logo, temos que

$$f(x_1) = y_1 < y < y_2 = f(x_2),$$

e como f é contínua, pelo T.V.I segue que existe c entre x_1 e x_2 tal que $f(c) = y$, ou seja, $f(J)$ é um intervalo, como queríamos mostrar.

□

Observação. Você pode pensar que este Corolário poderia "falhar" considerando, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) \equiv 1$ (função constante igual a 1), que é contínua. Porém, tomando qualquer intervalo, por exemplo, $[0, 1]$, temos que $f([0, 1]) = \{1\}$, ou seja, um conjunto formado por apenas um ponto, que é um intervalo, chamado de "*intervalo degenerado*".

Teorema 8.11 *(Teorema de Weierstrass ou do Valor extremo) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada e assume um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$.*

Demonstração. Mostraremos apenas que f é limitada superiormente e assume valor máximo em $[a, b]$, visto que a prova da outra parte é feita analogamente.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostremos primeiramente que f é limitada superiormente. De fato, se por absurdo f não for limitada superiormente,

então,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in [a,b] \text{ tal que } \quad f(x_n) > n.$$

Como $x_n \in [a,b], \forall n$, temos que a sequência (x_n) é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos $x_{n_k} \to c$.

Portanto,

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \forall n_k \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow c \in [a,b].$$

Assim, temos que

$$x_{n_k} \to c \in [a,b] \text{ e } f \text{ é contínua em } c,$$

donde segue, por continuidade, que

$$f(x_{n_k}) \to c. \tag{8.9}$$

Mas $f(x_n) \to +\infty$, pois $f(x_n) > n$, $\forall n$. Em particular, $f(x_{n_k}) > n_k$, donde segue que $f(x_{n_k}) \to +\infty$, o que entra em contradição com (8.9). Absurdo! Logo, f é limitada superiormente.

Por fim, mostremos que f assume um valor máximo em $[a,b]$. Como mostramos acima que f é limitada superiormente, segue que existe um supremo.

Seja então $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Precisamos mostrar que $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = M$.

Pela definição de supremo temos que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a,b]$ tal que $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Então, pelo Teorema do Sanduíche para sequências temos que

$$f(x_n) \to M.$$

Como $x_n \in [a,b]$, $\forall n$, temos que a sequência (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um limite ℓ, i.e.,

$$x_{n_k} \to \ell, \text{ com } \ell \in [a,b].$$

Por continuidade de f segue que $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$.

Mas $f(x_n) \to M$.

Portanto, pela unicidade do limite segue que $f(\ell) = M$, ou seja, f assume um valor máximo em $[a, b]$.

$\square$

Exercícios

1. Dada a função real de variável real $f(x) = 4+3x-x^2$. Use o Teorema do Valor intermediário para mostrar que existe um $c \in [2, 5]$ tal que $f(c) = 1$. Determine também o valor de $f(c)$.

2. Use o Teorema do valor intermediário para mostrar que $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x - 1$ possui uma raiz real no intervalo $[1, 2]$. Idem para o intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

3. Mostre que o Teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 + x + 3 = 0$ tenha uma raiz entre -2 e -1.

4. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

   Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ côncava e contínua, com $f(a) < f(b)$. Mostre que para cada $d \in (f(a), f(b))$, existe um único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

5. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)**

   (a) Sejam $f, g :: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $g(a) < f(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

   (b) Sendo $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, através do item (a) mostre que a função $h : D \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x - \cot(x)$ possui infinitas raízes.

6. **(Sel. Mestr. UFSM 2015/1)**

   (a) Mostre que a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x & \text{se} \quad x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x| & \text{se} \quad x \in (-\frac{1}{2}, 0] \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \in (0, 1], \end{cases}$$

   é contínua.

   (b) A função dada no item anterior assume valor máximo no domínio de definição? Justifique.

7. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

8.4 Continuidade uniforme

Nesta seção vamos apresentar um conceito mais forte de continuidade, chamado de *continuidade uniforme*.

Definição 8.12 Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *uniformemente contínua* se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in I$ tal que $|x - y| < \delta$, implique em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Observe que a diferença entre continuidade e continuidade uniforme, à primeira vista, parece sutil: na continuidade, dado $x \in I$, para todo $\varepsilon > 0$ escolhido, existe $\delta > 0$ (tal δ depende de ε e, também, do x escolhido) tal que $\forall y \in I$ tal que $|x - y| < \delta$, implica em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ou seja, a propriedade de continuidade é dita *local*. Já na continuidade uniforme, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (tal delta só depende da escolha do ε, não mais de ε e de algum ponto) tal que $\forall x, y \in I$ tal que $|x - y| < \delta$, implique em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ou seja, o δ estabelece uma propriedade de continuidade *global*.

Apresentaremos alguns exemplos e contraexemplos de funções uniformemente contínuas, mas antes enunciamos um importante conceito.

Definição 8.13 Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de *Lipschitz* se $\exists M > 0$ tal que $\forall x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

A constante $M > 0$ é chamada de *constante de Lipschitz*.

Vejamos alguns exemplos e contraexemplos.

Exemplo 1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é de Lipschitz.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(x) - f(y)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}\right| =$$

$$= 2 \left|\operatorname{sen} \frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x+y}{2}\right|.$$

Como $|\cos \alpha| \leq 1$ e $|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$, $\forall \alpha$, segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq 2 \left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 = |x - y|.$$

Logo, realmente, f é de Lipschitz com $M = 1$.

Exemplo 2. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ **não é** de Lipschitz.

Desconfiamos disso pois, observando o gráfico de f, perto da origem o mesmo parece possuir retas tangentes com inclinações muito "fortes", o que sugere que f não seja de Lipschitz. Veremos que, realmente, perto de zero a função dada não satisfaz a condição de Lipschitz.

De fato, se por absurdo f fosse de Lipschitz, então existiria $M > 0$ tal que, $\forall x, y \in [0, +\infty)$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Em particular, tome $x = 0$ e $y = \dfrac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ (note que quanto maior for o valor do natural n, mais perto de x estará y). Disso, temos

$$|f(x) - f(y)| = \left| f(0) - f(\frac{1}{n}) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq M \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{M}{n}.$$

Portanto, teríamos

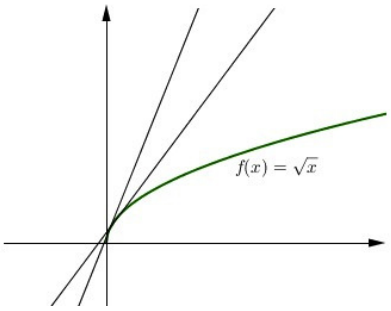
$$\frac{n}{\sqrt{n}} \leq M \Rightarrow \sqrt{n} \leq M, \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$n \leq M^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas isto implica que o conjunto N dos números naturais seria limitado superiormente por M^2, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que tal função f não é de Lipschitz.

Abaixo temos o esboço gráfico da função f, bem como uas retas tangentes próximas à origem, indicando geometricamente que as inclinações das mesmas aumentam gradativamente à medida que tomamos pontos cada vez mais próximos de zero (observe que exatamente em $x = 0$ f não é derivável).



Proposição 8.14 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for de Lipschitz, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ de Lipschitz com constante de Lipschitz $M > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$. Como f é de Lipschitz, temos que $\exists M > 0$ tal que, $\forall x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Tome $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Assim, $\forall x, y \in I$ tal que $|x - y| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua em I.

$\square$

Vejamos, então alguns exemplos de funções uniformemente contínuas.

Exemplo 1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é uniformemente contínua.

Solução. De fato, basta observar que tal função é de Lipschitz e, portanto, uniformemente contínua.

Exemplo 2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, embora seja contínua, não é uniformemente contínua.

Solução. De fato, mostremos que tal f não pode ser uniformemente contínua. Dado $\varepsilon = 1 > 0$ e tome $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, tome $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Temos, então que

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta,$$

mas

$$|f(x) - f(y)| = |n^2 - (n + \frac{1}{n})^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon,$$

ou seja, f não é uniformemente contínua.

Exemplo 3. A função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é uniformemente contínua.

Solução. Dado $\varepsilon > 0$, vamos obter $\delta > 0$ tal que, $\forall x, y \in [1, +\infty)$ tal que $|x - y| < \delta$ implique em

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

De fato,

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x - y|}{xy} < \frac{\delta}{xy},$$

e como $x, y \geq 1$, então $\frac{1}{xy} \leq 1$ e disso,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{xy} \leq \delta,$$

ou seja, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$.

Exemplo 4. A função $f : (0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é obviamente contínua, mas não é uniformemente contínua.

Solução. De fato, para $\varepsilon_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tome $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$.

Tomando $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{2}{n}$, temos que $x_n, y_n \in (0, 2]$ e são tais que

$$|x_n - y_n| = |\frac{1}{n} - \frac{2}{n}| = \frac{1}{n} < \delta,$$

mas

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|n - \frac{n}{2}\right| = \frac{n}{2} \geq 1 = \varepsilon_0, \ \forall n \geq 2,$$

ou seja, f não é uniformemente contínua.

A Proposição abaixo estabelece um importtante resultado que será usado no estudo de integrais.

Proposição 8.15 *Toda função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ em um intervalo fechado é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua.

Por absurdo, suponha que f não seja uniformemente contínua. Então,

$\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall \delta > 0$, $\exists x, y \in I = [a, b]$: $|x - y| < \delta$ mas $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n$, $y_n \in I = [a, b]$ tais que

$$|x_n - y_n| < \delta = \frac{1}{n}, \text{ mas } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Como $I = [a, b]$ é um intervalo limitado e $(x_n) \subset [a, b]$, então a sequência (x_n) é limitada. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass segue que existe subsequência (x_{n_k}) convergente, digamos,

$$x_{n_k} \to c,$$

e como $a \leq x_{n_k} \leq b$, segue que $a \leq c \leq b$, ou seja, $c \in [a, b]$.

Mas $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$, e portanto $y_{n_k} \to c$, ou seja, temos que a sequência (y_n), que também é limitada, possuirá uma subsequência (y_{n_k}) que converge também para o mesmo $c \in [a, b]$.

Ou seja, temos que $x_{n_k} \to c$ e $y_{n_k} \to c$, e como f é contínua, por hipótese, segue que

$$f(x_{n_k}) \to f(c) \text{ e } f(y_{n_k}) \to f(c),$$

o que é um absurdo, pois $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$.

Logo, f é uniformemente contínua.

$\square$

Obs.: Note que na demonstração acima, se o intervalo não fosse fechado, então c poderia não pertencer ao intervalo, e então não poderíamos usar a continuidade de f, pois neste caso, teríamos $x_{n_k} \to c$, mas não teria sentido escrever $f(x_{n_k}) \to f(c)$, pois não existiria $f(c)$.

Proposição 8.16 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função uniformemente contínua em $I \subset \mathbb{R}$ e se $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em I, então $(f(x_n))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Como f é uniformemente contínua em I, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x, y, \in I$ tal que $|x - y| < \delta$, implica em $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Tome (x_n) uma sequência de Cauchy em I. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implica em $|x_m - x_n| < \delta$.

E, pela continuidade uniforme, segue que

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon, \text{ sempre que } m, n \geq n_0,$$

ou seja, a sequência $(f(x_n))_n \subset \mathbb{R}$ também é de Cauchy, como queríamos mostrar.

□

Exercícios

1. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ é uniformemente contínua.

2. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ é uniformemente contínua.

3. Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é uniformemente contínua em $[1, +\infty)$, mas não é uniformemente contínua em $(0, +\infty)$.

4. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ forem uniformemente contínuas, mostre que $f + g$ também é uniformemente contínua.

5. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são limitadas e de Lipschitz, mostre que $f \cdot g$ também é de Lipschitz.

6. Mostre que $f(x) = x^2$ definida em $|x| \leq 17$ é lipschitziana, mas $f(x) = x^2$ definida em $\mathbb{R}$ não é.

7. Mostre que a função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$ não é lipschitziana num intervalo da forma $[0, a]$, $a > 0$, embora seja uniformemente contínua aí.

8. Prove que se f e g são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, então $g \circ f$ também é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

9. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que são equivalentes as seguintes afirmações:

   (i) f é uniformemente contínua;

   (ii) se $x_n, y_n \in I$ são tais que $x_n - y_n \to 0$, então $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

10. Seja $f : I \to \mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:

    (i) f não é uniformemente contínua;

    (ii) $\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x_n, y_n \in I$ tais que $|x_n - y_n| \to 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

11. Mostre que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ não é uniformemente contínua. (Sugestão: use o exercício 10)

12. **Def.** Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma *função de Hölder* se $\exists\, M > 0$ e $\exists\, \alpha \in (0, 1]$ tais que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^{\alpha}, \forall x_1, x_2 \in I.$$

    Note que no caso particular $\alpha = 1$, f é de Lipschitz .

    (a) Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.

    (b) Mostre que se a condição de Hölder permitíssemos $\alpha > 1$, seguiria que $f'(x) = 0$, $\forall x$ no interior de I e, portanto, teríamos f constante (esta é a razão para impor a condição $\alpha \leq 1$ na definição).

    (c) Mostre que a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, satisfaz a condição de Hölder com $M = 1$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ sendo, portanto, uniformemente contínua (Sugestão: basta uma manipulação algébrica simples).