Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 10 de Exercícios - Dimensão. Mudança de base

1. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0,1,1);(1,1,0);(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.
   (a) Mostre que β não é uma base para $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de β.

2. (a) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LI. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?
   (b) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LD. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

3. Ache uma base e a dimensão do subespaço $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ do $\mathbb{R}^3$.

4. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:
   $S = [(1,-1,2);(2,1,1)]$; $T = [(0,1,-1);(1,2,1)]$; $U = \{(x,y,z) : x+y = 4x-z = 0\}$ e $V = \{(x,y,z) : 3x-y-z=0\}$. Determine as dimensões de S, T, U, V e $S \cap T$.

5. Qual é a dimensão do espaço das matrizes 2×2 diagonais?

6. Sejam S, T subespaços do $\mathbb{R}^4$ dados por
   $$S = [(1,-1,2,3);(1,1,2,0);(3,-1,6,-6)]$$
   e
   $$T = [(0,-2,0,-3);(1,0,1,0)].$$
   Determine as dimensões de S, T e $S \cap T$.

7. Mostre que cada conjunto a seguir é uma base para o $\mathbb{R}^2$. Em seguida, determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = (6,2)$ em relação a cada uma das bases dadas.
   (a) $\alpha = \{(3,0);(0,3)\}$ (b) $\beta = \{(1,2);(2,1)\}$
   (c) $\gamma = \{(1,0);(0,1)\}$ (d) $\delta = \{(0,1);(1,0)\}$

8. Considere as bases β e γ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:
   $$\beta = \{(1,1);\ (0,-1)\} \quad \text{e} \quad \gamma = \{(1,2);\ (-1,3)\}.$$
   Obtenha a matriz de mudança de base $[I]^{\gamma}_{\beta}$. Em seguida, dado o vetor $\vec{u}$ tal que $[\vec{u}]_{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, obtenha $[\vec{u}]_{\beta}$ usando a matriz da mudança.

9. Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1,1,0);(0,1,0);(0,0,3)\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

10. Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1,1,0);(0,1,0);(0,0,3)\}$ para a base $\gamma = \{(1,1,1);(1,0,1);(1,0,-1)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Ache também a matriz de mudança da base γ para a base β.