Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Vetores L.I. e L.D. Bases

1. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ e } \ P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Considere o espaço vetorial $P_2 = \{at^2+bt+c \ : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2-2t+1$, $p_2 = t+2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.
   (a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.
   (b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3.

3. Seja V o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f, g, h \in V$ dados abaixo são linearmente independentes:

$$f(t) = \operatorname{sen} t, \ g(t) = \cos t \ \text{ e } \ h(t) = t.$$

4. Os vetores $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, -5, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, -4, 0)$ e $\vec{u}_4 = (2, 1, 1, 6)$ do $\mathbb{R}^4$ são L.I. ou L.D. ?

5. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x;\ 3x+x^2;\ 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2.

6. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{\vec{u} - \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, 2\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}\}$ também é L.I.

7. Se $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores L.I. de um espaço vetorial V, prove que o conjunto $\{2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w},\ 3\vec{u} - 4\vec{v} + 5\vec{w}\}$ é L.D.

8. Mostre que, se u, v e w são vetores LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ também são LI.

9. Considere $V[a, b]$ como sendo o espaço de todas as funções reais de uma variável real t de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Mostrar que os seguintes pares de vetores são LI:
   (a) t, t^2. (b) te^t, e^{2t}. (c) $\sin t, \cos t$. (d) $\cos t, \cos 3t$.

10. Defina a *média* $u \star v$ entre os vetores de um espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se, e somente se, $u = w$.

11. Dados os espaços vetoriais V_1 e V_2, considere o conjunto $E = V_1 \times V_2$, cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial.

12. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbb{R}^3$?
   (a) $\{(1, 1, -1); (2, -1, 0); (3, 2, 0)\}$ (b) $\{(1, 0, 1); (0, -1, 2); (-2, 1, -4)\}$
   (c) $\{(2, 1, -1); (-1, 0, 1); (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(1, 2, 3); (4, 1, 2)\}$

13. Mostrar que os vetores $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{w} = (3,0,2)$ e $\overrightarrow{s} = (2,-1,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre estes vetores.

14. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1,1,1); (1,1,0); (0,1,1)]$.

15. Mostre que $P_3 = [x^2 + x^3; x; 2x^2 + 1; 3]$.

16. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t^2)$, $1 - t$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3.