**Do Capítulo 2.**

**Seção 2.3.**

**01.** Como $A \sim M$ e $B \sim N$, segue que $\exists f : A \to M$ e $g : B \to N$ bijeções. Defina $h : A \times B \to M \times N$ por $h(x, y) = (f(x), g(y))$. $h$ é injetora, pois $h(x, y) = h(a, b) \Rightarrow (f(x), g(y)) = (f(a), g(b)) \Rightarrow f(x) = f(a)$ e $g(y) = g(b)$, e como $f$ e $g$ são injetivas, segue que $(x, y) = (a, b)$. $h$ é sobrejetiva, pois dado $(m, n) \in M \times N$, segue que $m \in M$ e $n \in N$, e como $f : A \to M$ é sobrejetora (pois é bijetora), segue que $\exists a \in A$, tal que $f(a) = m$. Do mesmo modo, pela sobrejetividade da $g$, temos que $\exists b \in B$, tal que $g(b) = n$. Assim, temos $(m, n) = (f(a), g(b)) = h(a, b)$, onde $(a, b) \in A \times B$. Portanto, $h$ é bijetora e daí, $A \times B \sim M \times N$.

**02.** Defina $f : (a, b) \to (c, d)$ por uma reta que passa pelos pares ordenados $(a, c)$ e $(b, d)$, por exemplo. É claro que $f$ é bijetiva e daí, $(a, b) \sim (c, d)$.

**03.** A função $f$ é tal que manda $\frac{1}{2} \mapsto 1$ (note que mandamos assim um elemento de $(0, 1)$ para a extremidade 1), $\frac{1}{3} \mapsto \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$, ... de forma bijetiva para tais pontos. Nos outros casos, obviamente $x \mapsto x$ é bijeção. Portanto, $f$ é bijetiva e daí, $(0, 1) \sim (0, 1]$.

**04.** Como $A \subset B$, defina $f : A \to B$ por $f(x) = x$. Obviamente, $f$ é injetiva e daí, $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$.

**05** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ injetivas. Como vimos no capítulo anterior, a composição de funções injetivas é injetiva, segue que $g \circ f : A \to C$ é injetiva, donde segue que $\operatorname{card} A \leq$ card C.

**Seção 2.4.**

**01.** Podemos fazer as seguintes decomposições, onde as uniões após as igualdades são disjuntas: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ e $A \cup B =$

$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$. Assim, temos que $\operatorname{card} A = \operatorname{card}(A\setminus B)+\operatorname{card}(A\cap B)$, $\operatorname{card} B = \operatorname{card}(B\setminus A)+\operatorname{card}(A\cap B)$ e $\operatorname{card}(A\cup B) = \operatorname{card}(A\setminus B)+\operatorname{card}(B\setminus A)+\operatorname{card}(A\cap B)$. Somando as duas primeiras, obtemos $\operatorname{card} A + \operatorname{card} B = \operatorname{card}(A\setminus B)+\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card}(B\setminus A)+\operatorname{card}(A\cap B) = (\operatorname{card}(A\setminus B)+\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card}(B\setminus A))+\operatorname{card}(A\cap B) = \operatorname{card}(A\cup B)+\operatorname{card}(A\cap B)$.

**02.** Como $\mathfrak{m} > 1$, temos, pela proposição 2.11, que $\exists\mathfrak{p}$ cardinal, tal que $\mathfrak{m} = 1+\mathfrak{p}$ e daí, temos que $2^{\mathfrak{m}} = 2^{1+\mathfrak{p}} = 2\cdot 2^{\mathfrak{p}}$. Escrevendo $\mathfrak{n} = 2^{\mathfrak{p}}$, concluímos que $2^{\mathfrak{m}} = 2\mathfrak{n}$.

**03.** Sejam $M$ e $N$ conjuntos, tais que $M\subset N$, onde $\operatorname{card} M = \mathfrak{m}$ e $\operatorname{card} N = \mathfrak{n}$. Seja $P$ com $\operatorname{card} P = \mathfrak{p}$, tal que $P\cap M = P\cap N = \emptyset$. Como pela proposição 1.11-(e) vale a propriedade $M\subset N \Rightarrow M\cup P\subset N\cup P$ e como $P\cap M = P\cap N = \emptyset$, concluímos que $\operatorname{card}(M\cup P)\leq \operatorname{card} N\cup P$, ou seja, $\operatorname{card} M+\operatorname{card} P\leq \operatorname{card} N+\operatorname{card} P$, i.e., $\mathfrak{m}+\mathfrak{p}\leq\mathfrak{n}+\mathfrak{p}$.

**04.** Sejam $M, N$ e $P$ conjuntos tais que $\operatorname{card} M = \mathfrak{m}$, $\operatorname{card} N = \mathfrak{n}$ e $\operatorname{card} P = \mathfrak{p}$. Suponha também que $\mathfrak{m}\leq\mathfrak{n}$. Logo, existe uma função $f: M\to N$ injetora. Defina $g: M\times P\to N\times P$ por $g(x,y) = (f(x),y)$. Note que $g$ é injetora, pois $g(m_1,p_1) = g(m_2,p_2) \Rightarrow (f(m_1),p_1) = (f(m_2),p_2)$, então, $f(m_1) = f(m_2)$ e $p_1 = p_2$. Como $f$ é injetiva, obtemos que $m_1 = m_2$ e portanto, segue que $(m_1,p_1) = (m_2,p_2)$, concluindo que $g$ é realmente injetiva. Disso, concluímos que $\operatorname{card}(M\times P)\leq\operatorname{card}(N\times P)$, e como $\operatorname{card}(M\times P) = \mathfrak{m}\cdot\mathfrak{p}$ e $\operatorname{card}(N\times P) = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}$, obtemos $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{p}\leq\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}$.

**05.** Sejam $M, N$ e $P$ conjuntos, tais que $\operatorname{card} M = \mathfrak{m}$, $\operatorname{card} N = \mathfrak{n}$ e $\operatorname{card} P = \mathfrak{p}$. Note que $(M^N)^P = \{f: P\to M^N\} = \{f: P\to\{g: N\to M\}\}$ e que $M^{N\times P} = \{h: N\times P\to M\}$. Para toda $f\in(M^N)^P$, para todo $x\in P$, temos que $f(x)\in M^N$ e então $f(x) = g_x: N\to M$ e, para $y\in N$, $g_x(y) = m\in M$. Defina então $\varphi: (M^N)^P\to M^{N\times P}$ pondo $f\mapsto h$. Vamos mostrar que $\varphi$ é bijetiva. Seja $h: N\times P\to M$. Então, se $(y,x)\in N\times P$, $h(y,x)\in M$. Portanto, $\forall x\in P$, $g_x(y) = h(y,x)$ define uma função de $N$ em $M$ e então $f(x) = g_x$ é uma função de $P$ em $M^N$. Portanto, $\varphi(f) = h$, i.e., $\varphi$ é sobrejetiva. Mostra-

remos agora a injetividade. Sejam $f_1, f_2 \in (M^N)^P$ tais que $f_1 \neq f_2$. Então $\exists x \in P$ tal que $f_1(x) = g_1 \neq g_2 = f_2(x)$ e, como $g_1 \neq g_2$, $\exists y \in N$ tal que $g_1(y) \neq g_2(y)$. Assim, $\varphi(f_1)(y,x) = g_1(y) \neq g_2(y) = \varphi(f_2)(y,x)$, i.e., $\varphi$ também é injetiva. Portanto, $\varphi$ é bijetiva, donde segue que $(M^N)^P \sim M^{N\times P}$, ou seja, $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{p}}$.

**Seção 2.5.**

**01.** Seja $f : \mathbb{N} \to A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ dada por $f(n) = \frac{1}{n}$. Claramente, $f$ é sobrejetiva. Como $\mathbb{N}$ é enumerável, segue, pela proposição 2.19, que $A$ é enumerável.

**02.** O conjunto $X = \{n+\sqrt{2} : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável, pois a função $f : \mathbb{N} \to X$ dada por $f(n) = n+\sqrt{2}$ é sobrejetiva. Novamente, pela proposição 2.19, segue o resultado.

**03.** Basta observar que $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \ln(n)$ é bijetiva, e portanto, $f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$, ou seja, $f(\mathbb{N}) = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.

**04.** Como $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, segue pela proposição 2.11 que $\exists \mathfrak{p}$ cardinal, tal que $\mathfrak{p} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$. Assim, $\mathfrak{m} + \aleph_0 = (\mathfrak{p} + \aleph_0) + \aleph_0 = \mathfrak{p} + (\aleph_0 + \aleph_0) = \mathfrak{p} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$.

**05.** (i) para $\lambda = 1$, temos $\aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Logo, vale a base da indução. (ii) suponha que $\aleph_0^k = 2^k\aleph_0$ para um certo $k \in \mathbb{N}$. Então, $2^{k+1}\aleph_0 = 2^k 2\aleph_0 = 2^k(\aleph_0 + \aleph_0) = 2^k\aleph_0 = 2^k(\aleph_0\aleph_0) = (2^k\aleph_0)\aleph_0 = (\aleph_0^k)\aleph_0 = \aleph_0^{k+1}$. Logo, o resultado segue por indução sobre $\lambda$.

**06.** Seja $A_1, A_2, ...$ uma família enumerável de conjuntos enumeráveis. Assim, $A_1 = (a_{11}, a_{12}, ...); A_2 = (a_{21}, a_{22}, ...)$, ... Considere $A = A_1 \times A_2 \times ...$ o produto cartesiano enumerável dos enumeráveis $A_j$, $j \in \mathbb{N}$. Suponha, por absurdo, que $A$ seja enumerável. Então, podemos listar todos os seus elementos: $A = \{x_1, x_2, ...\}$, onde $x_1 = (x_{11}, x_{12}, ...)$; $x_2 = (x_{21}, x_{22}, ...)$,... com $x_{ij} \in A_j$, $\forall j$. Seja $b = (b_1, b_2, ...)$, onde $b_i \in A_i$, $\forall i$ e tal que $b_i \neq x_{ii}$, $\forall i$. Por um lado, temos que $b \in A$, pois $A$ contém todos os elementos de $A_1 \times A_2 \times ....$ Por

outro lado, $b \neq x_1$, pois $b_1 \neq x_{11}$; também $b \neq x_2$, pois $b_2 \neq x_{22}$ etc. Ou seja, $b \neq x_i$, $\forall i$ e disso, temos também que $b \notin A$. Absurdo! Portanto, $A$ é não enumerável.

**07.** Seja $X = \{(a_1, a_2, ...) : a_i = 0 \text{ ou } a_i = 1, \forall i\}$. Mostremos que $X$ é não enumerável. De fato, se, por absurdo, $X$ for enumerável, então poderemos listar todos os seus termos: $X = \{x_1, x_2, ...\}$, onde $x_1 = (a_{11}, a_{12}, ...)$; $x_2 = (x_{21}, x_{22}, ...)$; ... , onde $a_{ij} = 0$ ou $a_{ij} = 1$, $\forall i$, $\forall j$. Considere o elemento $b = (b_1, b_2, ...)$, tal que $b_k = 1$ ou $b_k = 0$, $\forall k$, tal que $b_i = 1$ se $a_{ii} = 0$ e $b_i = 0$ se $a_{ii} = 1$. Por um lado, $b \in X$, pois $b$ é uma sequência infinita de zeros e uns. Por outro lado, $b \neq x_1$, pois $b_1 \neq a_{11}$, $b \neq x_2$ pois $b_2 \neq a_{22}$, etc; i.e., $b \notin X$. Absurdo! Portanto, $X$ é não enumerável.

**08.** Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = y$. É fácil ver que $f$ é sobrejetora, pois $\forall z \in \mathbb{R}$, $\exists (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, tal que $f(x, y) = z$. De fato, basta tomar por exemplo $(x, y) = (1, z)$: $f(x, y) = f(1, z) = z$. Como $\mathbb{R}$ é não enumerável, segue do Corolário 2.20 que $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ é não enumerável.

**09.** $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{a}{b}) \Rightarrow 2^m 3^n = 2^a 3^b$, donde segue que $m = a$ e $n = b$, portanto, $f$ é injetora. Logo, como $\mathbb{N}$ é enumerável, segue da Proposição 2.18 que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

**10.** Basta definir $f : (0, 1) \to (a, b)$ por $f(x) = (b - a)x + a$. Obviamente, $f$ é bijetiva e daí, $(0, 1) \sim (a, b)$. Como $(0, 1) \sim \mathbb{R}$, segue por transitividade da equivalência "$\sim$" que $(a, b) \sim \mathbb{R}$. Do mesmo modo, conclui-se que $\mathbb{R} \sim (c, d)$. Logo, pela transitividade, obtemos destes dois fatos que $(a, b) \sim (c, d)$.

**Seção 2.6**

**01.** Pela Proposição 2.36 temos que $\mathcal{P}(A) \sim \{0, 1\}^A$ e daí, obtemos que $\text{card}\,(\mathcal{P}(A)) = \text{card}\,(\{0, 1\}^A) = 2^{\text{card}\,A}$. Analogamente, temos que $\text{card}\,(\mathcal{P}(B)) = 2^{\text{card}\,B}$. Como $\text{card}\,A = \text{card}\,B$, segue o resultado.

**02.** Sejam $(0,1)$, $(1,2) \subset \mathbb{R}$. Como são disjuntos, temos que $\operatorname{card}((0,1) \cup (1,2)) = \operatorname{card}(0,1) + \operatorname{card}(1,2) = \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$. Por um lado, temos que $(0,1) \cup (1,2) \subset \mathbb{R}$ e disso, segue que $\operatorname{card}((0,1) \cup (1,2)) \leq \operatorname{card}\mathbb{R} = \mathfrak{c}$, ou seja, $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} \leq \mathfrak{c}$. Por outro lado, como $(0,1) \subset (0,1) \cup (1,2)$, segue que $\operatorname{card}(0,1) \leq \operatorname{card}((0,1) \cup (1,2)) = \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$, ou seja, $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$. Portanto, concluímos que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

**03.** Repare que $(0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup ... \subset \mathbb{R}$, e como tal união é disjunta, procedendo como no exercício anterior, concluímos que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + ... \leq \mathfrak{c}$. Por outro lado, $(0,1) \subset (0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup ...$ o que, c.f. feito no exercício anterior, concluímos que $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + ....$ Portanto, obtemos que $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} + \mathfrak{c} + ... = \mathfrak{c}$.

**04.** Basta observar que $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

**05.** Pelo teorema de Cantor (Teorema 2.39), temos que $\operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X)$. Assim, seja $X$ tal que $\operatorname{card} X = \mathfrak{c}$ (por exemplo, $X = \mathbb{R}$). Então, pelo teorema de Cantor, temos que $\mathfrak{c} = \operatorname{card} X < \operatorname{card} \mathcal{P}(X) = 2^{\operatorname{card} X} = 2^{\mathfrak{c}}$.

**06.** Seja $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, ou seja, $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Assim, $\operatorname{card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = (\operatorname{card}\mathbb{R})^{\operatorname{card}\mathbb{R}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. A última igualdade é devida ao exercício 4.3.

**07.** Defina $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ por: $\forall a = 0,a_1a_2...$ e $b = 0,b_1b_2...$, $f(a,b) = 0,a_1b_1a_2b_2...$ se $(a,b) \neq (0,0)$ e $f(a,b) = 0$ se $(a,b) = (0,0)$. $f$ é injetiva, pois $f(a,b) = f(x,y) \Rightarrow 0,a_1b_1a_2b_2... = 0,x_1y_1x_2y_2...$ implica que $a_i = x_i$ e $b_j = x_j$, $\forall i$, $\forall j$, i.e., $(a,b) = (x,y)$. $f$ também é sobrejetiva pois dado $t = 0,t_1t_2t_3... \in [0,1]$, $t \neq 0$, basta tomar $(a,b) = (0,t_1t_3t_5...,0,t_2t_4t_6...) \in [0,1] \times [0,1] = [0,1]^2$ e daí, $f(a,b) = (0,t_1t_2t_3...)$. E se $t = 0$ tome $(a,b) = (0,0)$. Portanto, $f$ é bijetiva e, então, $[0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$. Como $\operatorname{card}[0,1] = \mathfrak{c}$, segue que $\operatorname{card}([0,1] \times [0,1]) = \mathfrak{c}$. Ainda, $[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R}$, portanto, $[0,1] \times [0,1] \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ e daí, segue que $\operatorname{card}\mathbb{R}^2 = \mathfrak{c}$. Por fim, definindo $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ por $g(x+iy) = (x,y)$, segue que tal $g$ é bijetiva e daí, $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$, donde segue que $\operatorname{card}\mathbb{C} = \mathfrak{c}$.

**08.** Como $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$ e $n + \aleph_0 = \aleph_0$, $\forall n \leq \aleph_0$, temos que $[\aleph_0^{10+\aleph_0}]^{\aleph_0+\aleph_0} + {\aleph_0}^{\aleph_0+\aleph_0} = [\aleph_0^{\aleph_0}]^{\aleph_0} + {\aleph_0}^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0} + {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

**Do Capítulo 03.**

**Seção 3.1**

**01.** Convertendo $\frac{1}{4}$ para o sistema de base 3, obtemos $\frac{1}{4} = (0,020202...)_3$. Como tal representação é formada apenas pelos dígitos 0 e 2, pelo lema 3.2, concluímos que $\frac{1}{4} \in \mathcal{C}$.

**02.** Como $\frac{1}{\varphi} \approx 0,61803$ e $\frac{\varphi}{2} \approx 0,80902$, observamos que $\frac{\varphi}{2} \notin \mathcal{C}_2$, pois $\frac{\varphi}{2} \in (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ e $\frac{1}{\varphi} \notin \mathcal{C}_2$, pois $\frac{1}{\varphi} \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Logo, $\frac{\varphi}{2}, \frac{1}{\varphi} \notin \mathcal{C}_2$ implicam que $\frac{\varphi}{2}, \frac{1}{\varphi} \notin \mathcal{C} = \cap_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_n$.

**Seção 3.3**

**01.** (a) $\frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8} = 1 + \frac{1}{\frac{8}{7}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{7}}$. (b) $\frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.
(c) $\frac{2}{11} = \frac{1}{\frac{11}{2}} = \frac{1}{5+\frac{1}{2}}$. (d) $\sqrt{5} = 2+\sqrt{5}-2 = 2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2+\frac{1}{2+\sqrt{5}} = 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\ldots}}$.
(e) $\sqrt{10} = 3+\sqrt{10}-3 = 3+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{10}-3}} = 3+\frac{1}{3+\sqrt{10}} = 3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\ldots}}$.