Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I - Parte 1[1]
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 07/11/2019

Questão 01. Sejam A e B dois conjuntos não vazios tais que $A \subset B$.

(a) Mostre que $\operatorname{card} A \leq \operatorname{card} B$. Dê um exemplo para mostrar que vale a desigualdade estrita.

(b) Adicionando-se a hipótese de que B é enumerável mostre que A também é enumerável.

Questão 02. Decida se cada conjunto a seguir é enumerável ou não enumerável, justificando:

(a) O conjunto de todas as sequências infinitas formadas apenas pelos dígitos 0 e 1.

(b) O conjunto $X = \left\{ \dfrac{p}{3^q} \,:\, p, q \in \mathbb{N} \right\}$ [Dica: use a questão anterior para ajudar]

Questão 03. Use a definição de limite para provar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$.

Questão 04. Usando o Princípio da indução Matemática, prove a desigualdade de Bernoulli:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com esta desigualdade, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$ para $r > 1$.

Questão 05. Sejam (x_n) uma sequência tal que $x_n \to 0$ e (y_n) uma sequência limitada. Prove que

$$x_n \cdot y_n \to 0.$$

Questão 06. A sequência (x_n) dada por $x_n = \operatorname{sen} n$ possui subsequência convergente? Justifique.

Questão 07. Sejam $0 < r < 1$ e (x_n) uma sequência tais que $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que a sequência (x_n) satisfazendo as hipóteses acima é de Cauchy.

(b) Mostre que a sequência (x_n) definida recursivamente por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2x_n} \end{cases}$$

satisfaz as hipóteses do problema, sendo portanto convergente. Em seguida, calcule o seu limite.

Questão 08. Se (x_n) e (y_n) forem duas sequências de Cauchy, use a definição de sequência de Cauchy para provar que $(x_n y_n)$ é também de Cauchy.

Questão 09. Seja (x_n) uma sequência limitada e seja $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Mostre que se $M \notin \{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, então existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to M$.

[1] A Parte 1 é para ser feita em aula e vale 60% da nota da Segunda avaliação, e a Parte 2 é para ser feita em casa e vale 40% a nota da Segunda avaliação.

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I - Parte 2
(para ser entregue no dia 12/11/2019)
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 07/11/2019

Questão 10. A sequência de Fibonacci (a_n) é definida indutivamente por

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad , \text{ para } n \geq 1 \end{cases}.$$

Seja $x_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$. Prove que:

(a) $a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n \cdot a_{n+1} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{(-1)^n}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}$.

(c) $x_1 > x_3 > x_5 > ... > x_{2n+1} > x_{2n} > ... > x_6 > x_4 > x_2$. (Sugestão: verifique antes que $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = \frac{1}{1+x}$)

(d) Justifique que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

(e) Justifique que c é a raiz positiva da equação $f(x) = x$ e que c é o número de ouro

$$c = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}$$