Fundação Universidade Federal de Pelotas Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica

Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 07 de Exercícios - Determinantes

1. Calcule os seguintes determinantes:

(a)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$
 (b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

2. Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$$

3. Sem calcular o determinante, justifique por que x=0 e x=2 satisfazem a equação

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Se det $M \neq 0$ e MN = MP, mostre que N = P.

5. Uma outra maneira de definir que duas matrizes A e B são semelhantes é se existir uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Mostre que se A e B são semelhantes, então det $A = \det B$.

6. Se A for uma matriz idempotente, ou seja, tal que $A^2 = A$, quanto vale det A?

7. Dizemos que uma matriz quadrada A é ortogonal se $A \cdot A^T = I$. Dessa forma, se A for uma matriz ortogonal, mostre que det $A = \pm 1$.

8. Se $A^TB^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e det B = 2, quanto vale det A?

9. Se $A \cdot M = M \cdot B$, onde M é inversível, mostre que, para qualquer escalar λ , vale

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I).$$

10. Use a regra de Cramer para resolver os sistemas lineares:

(a)
$$\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \\ -2x + 2y - z = 8 \end{cases}$$
 (b)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 5y + z = 8 \\ -2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$
 (c)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 3 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$
 (d)
$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 4x + 5y + z = 8 \\ -2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 14 \\ -x + 2y + t = 3 \\ 3x - 2z - t = 11 \\ 4y + z - 3t = 7 \end{cases}$$

11. Determine os valores de k e p de modo que o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 4\\ x + ky + z = p\\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

seja:

- (a) compatível determinado.
- (b) compatível indeterminado.
- (c) incompatível.

12. Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz inversa A^{-1} de duas formas: (a) usando o algoritmo de obtenção da inversa via operações elementares sobre linhas; (b) usando a matriz adjunta.

13. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcule:

- (a) $\operatorname{adj} A$.
- (b) $\det A$.
- (c) A^{-1} .