Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Matrizes elementares e a matriz inversa

1. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma canônica escalonada reduzida por linhas.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

2. Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível, verifique que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2E_1A = I$.

   (b) Escreva A^{-1} como um produto de matrizes elementares.

4. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

5. Seja A uma matriz 3×3. Encontre uma matriz B para a qual BA é a matriz que resulta de A permutando as duas primeiras linhas e depois multiplicando a terceira linha por seis.

6. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas:
   "Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$" e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1 + \ell_2$"*.
   Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

7. Calcule a inversa das matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, caso existam.

8. Em que condições a matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$ é inversível e qual é sua inversa?

9. Seja a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-2}.
   Obs.: Note que $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$.

10. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se

$$A^2 = A.$$

De acordo com a definição acima

(a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.

(b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

11. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

12. Prove que se A e B são matrizes quadradas e de mesmo tamanho e se AB é inversível, então A e B são inversíveis.

13. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.

14. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Resolva-o aplicando operações elementares sobre linhas.

(b) Reescrevendo o sistema (1) na notação matricial

$$Ax = b\,, \tag{2}$$

podemos encontrar o valor da matriz-solução x, multiplicando (2) à esquerda por A^{-1}, se esta inversa existir. Encontre A^{-1} e obtenha o valor de x dessa forma. Compare sua resposta com a obtida no item anterior.