Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 19/09/2019

Questão 01. Dadas as funções $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to D$, prove que se h é injetiva e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

Questão 02. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos, com $X_\lambda \subset A$, $\forall \lambda \in \Lambda$ e $f : A \to B$ uma função. Mostre que

$$f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(X_\lambda).$$

Questão 03. Mostre que, para qualquer número real $y > 0$, tem-se $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] = \emptyset$.

Questão 04. Sejam a, b no corpo dos reais e $0 < r < 1$ tais que $|b - a| < r|a|$. Mostre que

$$|b| > (1 - r)|a|.$$

Poderíamos retirar a hipótese $0 < r < 1$? Justifique.

Questão 05. Responda formalmente cada item a seguir.

(a) Prove que $\sqrt{2} - 1$ não é racional.

(b) Justifique que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

(c) Mostre que o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3 - 2\sqrt{2},\ x > 0\}$ é limitado inferiormente, mas não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Questão 06. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado não arquimediano.

(a) Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais fica limitado superiormente em $\mathbb{K}$.

(b) Conclua que, mesmo que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente em $\mathbb{K}$, não existe o $\sup \mathbb{N}$.

Questão 07. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado arquimediano e $a, b \in \mathbb{K}$ tais que $0 < a < b$. Prove que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } b < n_0 \cdot a.$$

Questão 08. Sejam A e B dois conjuntos limitados superiormente em $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$. Defina o conjunto

$$A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Mostre que $A \cdot B$ também é limitado superiormente e prove que

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Questão	01	02	03	04	05	06	07	08
Valor	1,0	1,0	1,5	1,5	4,0	2,0	0,5	1,5