Fundação Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Bach. em Química e Bach. em Química industrial
Disciplina de Álgebra linear e Geometria analítica
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 1 de Exercícios - Vetores no Plano

1. Esboce no plano cartesiano a representação posicional de cada vetor $\overrightarrow{u}$ dado, de duas formas: a partir da origem $(0,0)$ e a partir do ponto P destacado. Depois, determine o módulo de cada vetor.

   (a) $\overrightarrow{u} = (3,4)$; $P(2,1)$ (b) $\overrightarrow{u} = (-2,5)$; $P(-3,4)$ (c) $\overrightarrow{u} = (4,0)$; $P(2,6)$.

2. Dado o vetor $\overrightarrow{u} = (\sqrt{3},1)$, determine seu módulo, sua direção e seu sentido. Represente-o no plano cartesiano e dê um outro vetor $\overrightarrow{v}$ equipolente a $\overrightarrow{u}$.

3. Dados os pontos $P(2,5)$, $Q(1,6)$ e $R(-3,2)$, determine o ponto S tal que $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ representem o mesmo vetor.

4. Dados $\overrightarrow{u} = (-3,4)$, $\overrightarrow{v} = (1,6)$ e $\overrightarrow{w} = (2,3)$, determine:

   (a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. (b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{w}$. (c) $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$. (d) $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}||$.

5. Decida se cada afirmação a seguir é verdadeira ou falsa, justificando as falsas:

   (a) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$.
   (b) Se $||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{v}||$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
   (c) Se $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.
   (d) Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{u} // \overrightarrow{v}$.
   (e) Se $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, então $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$.
   (f) Os vetores $3\overrightarrow{v}$ e $-4\overrightarrow{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

6. Duas forças de magnitudes $60N$ e $80N$ formam um ângulo de 30° e estão aplicados no mesmo ponto de um objeto. Determine o módulo da força resultante.

7. Dados os pontos $A(-1,2)$; $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$, determine o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$.

8. Dado o vetor $\overrightarrow{v} = (-2,1)$, achar o vetor paralelo a $\overrightarrow{v}$ que tenha:

   (a) o mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$ e 3 vezes o módulo de $\overrightarrow{v}$.
   (b) o sentido contrário de $\overrightarrow{v}$ e metade do módulo de $\overrightarrow{v}$.

9. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A(x,1)$, $B(4,x+3)$, $C(x,x+2)$ e $D(2x,x+6)$.

10. Dados $A(2,y)$ e $B(3,3)$, determine y para que o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

11. Sejam $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$ pomntos do plano. Demonstre que $d(A,B) = ||\overrightarrow{AB}||$.

12. Dados os pontos $A(2,3)$ e $B(5,4)$, determine um ponto C tal que $\overrightarrow{AC}$ seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{u} = (2,1)$ e $||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||$.

13. Sejam $\overrightarrow{u} = (x_1,y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2,y_2)$. Demonstre que

$$||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = 2 \cdot \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v},$$

   onde $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ denota o número $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

14. Determine um vetor unitário de mesma direção e sentido oposto ao vetor $\overrightarrow{u} = (3, -1)$.

15. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, determine $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}$ e $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||$.

16. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, ache o vetor unitário tendo a mesma direção que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

17. Se $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + 3\rightarrow j$ e $\overrightarrow{w} = -6\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j}$, ache os escalares h e k tais que $\overrightarrow{v} = h \cdot \overrightarrow{w} - k \cdot \overrightarrow{u}$.

18. Expresse o vetor $\overrightarrow{u} = (6, -2)$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v} = (1, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (1, -1)$.

19. Encontre o produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em cada caso:

    (a) $\overrightarrow{u} = (-1, 2)$ e $\overrightarrow{v} = (-4, 3)$.
    (b) $\overrightarrow{u} = (3, 5)$ e $\overrightarrow{v} = (2, -3)$.
    (c) $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$.
    (d) $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i}$.

20. Mostre que $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} = 1$, $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = 1$ e $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$.

21. Determine o cosseno do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (4, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -1)$.

22. Dados $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{i} - k\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j}$, determine o valor do escalar k para que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ sejam:

    (a) paralelos,
    (b) ortogonais.

23. Sendo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vetores no plano, prove que

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}.$$

24. Sejam $\overrightarrow{u} = (2, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (-3, 5)$. Determine:

    (a) o produto escalar entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,
    (b) o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$,
    (c) a projeção do vetor $\overrightarrow{u}$ sobre o vetor $\overrightarrow{v}$.

25. Considere o triângulo ABC com vértices em $A(3, 3)$, $B(0, 1)$ e $C(1, 6)$.

    (a) Verifique que este retângulo é reto em A.
    (b) Calcule a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC.
    (c) Determine o pé da altura do triângulo relativo ao vértice A.

26. Calcule o ângulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, sabendo que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$, $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e que o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é de 30°.

27. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores não-nulos. Mostre que $\overrightarrow{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v} - P_{\overrightarrow{u}}^{\overrightarrow{v}}$.