

Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática

Prof. Dr. Maurício Zahn

Lista 07 de Exercícios - Funções trigonométricas e hiperbólicas

1. Prove que a função seno $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ é função ímpar.
 Prove que a função cosseno $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $g(x) = \cos x$ é função par.
 A função tangente é par, ímpar, ou nem par e nem ímpar?
2. Sejam f e g as funções dadas por

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g : [-1, 1] \rightarrow [1, 2], g(x) = x^2 + 1.$$

Determine $g \circ f$. Esta função é inversível? Justifique.
3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \cos x$.
 Determine $f([0, \frac{\pi}{2}])$, $f([0, \pi])$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}(\{\frac{1}{2}\})$ e $f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$.
4. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

a) $f(x) = 1 + 2 \sin\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)$	d) $f(x) = \csc\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$
b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$	e) $f(x) = 1 - 2 \cos x $
c) $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	f) $f(x) = 1 - 2 \sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
5. Sejam as funções $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0, +\infty)$ dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$g(x) = 2 \ln \csc x$$

Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?
6. Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2 \sin x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.
7. Calcule:

a) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$	c) $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$
b) $\tan\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + \arcsin\frac{1}{4}\right)$	
8. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio e imagem:

(a) $f(x) = \arccos(3 + 2x)$	(b) $f(x) = \frac{2\pi}{5} - 3 \arcsin(1 - x)$
(c) $f(x) = \frac{\pi}{3} + 2 \arctan(3x - 1)$	(d) $f(x) = -\operatorname{arccsc}(3 - 2x)$
9. Em cada item a seguir é dada uma função hiperbólica. Determine as outras cinco.

a) $\sinh x = -\frac{3}{4}$.	b) $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$.	c) $\tanh x = -\frac{7}{25}$.
-------------------------------	--	--------------------------------
10. Verifique a paridade das funções seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica.
11. Esboçar o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = 1 - \sinh x$	(b) $f(x) = \sinh(x - 1)$
(c) $f(x) = 1 - 2 \sinh(1 - x)$	(d) $f(x) = \cosh(x - 2)$
(e) $f(x) = 2 - \operatorname{sech} x$	(f) $f(x) = 1 - 2 \coth(1 - x)$

12. Demonstre que:

(a) $\sinh(v - w) = \sinh v \cdot \cosh w - \sinh w \cdot \cosh v.$

(b) $\operatorname{csch} 2x = \frac{1}{2} \operatorname{sech} x \cdot \operatorname{csch} x.$

(c) $\tanh(\ln x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$

(d) $\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} = e^{2x}.$

(e) $\tanh x = \frac{\sinh 2x}{1 + \cosh 2x}.$

13. Dado $\tanh(a + b) = 3$ e $\tanh b = 2$, achar $\cosh a$.

14. Simplifique: $M = \frac{\cosh 2x + \cosh 4y}{\sinh 2x + \sinh 4y}.$

15. Calcule o valor numérico de cada expressão:

(a) $\operatorname{arcsinh} 0,25 + \operatorname{arcsinh} \frac{3}{4}$

(b) $\operatorname{arccosh} 3 - \operatorname{arcsinh} 1$

16. Prove a seguinte identidade¹: $\operatorname{arccsch} x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \right).$

17. Usando o exercício anterior, mostre que $\operatorname{arccsch} x = \operatorname{arcsinh} \frac{1}{x}.$

18. Prove que $\sinh^2 x - \sinh^2 y = \sinh(x + y) \sinh(x - y).$

¹ Esta é a representação logarítmica da função arco-cossecante hiperbólica. Você a definiu no exercício proposto na teoria de hiperbólicas inversas?