Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Pré-Cálculo
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 de Exercícios - Tipos de funções

1. Determine o valor de b em $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq b\}$ de modo que a função $f : \mathbb{R} \to B$ dada por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja sobrejetiva.

2. Determinar o vértice e a imagem de cada parábola a seguir:
   a) $y = 4x^2 - 4$; b) $y = -x^2 + 3x$;
   c) $y = 2x^2 - 5x + 2$; d) $y = x^2 - \frac{7}{3}x - 2$.

3. Qual deve ser o valor de k para que $y = 2x^2 - kx + 8$ tenha duas raízes reais e iguais?

4. Determine m na função $f(x) = 3x^2 - 4x + m$ de modo que se tenha $\mathrm{Im}(f) = [2, +\infty)$.

5. Determine os valores de m para que a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = (m-1)x^2 + (2m+3)x + m$$
tenha dois zeros reais e distintos.

6. Estudar $f(x) = x^2 - 6x + 5$ quanto ao crescimento e decrescimento.

7. Esboce o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem

(a) $f(x) = 2 - x$	(b) $f(x) = 2x + 5$	(c) $f(x) = x^2 + 3x + 4$
(d) $f(x) = 16 + 6x - x^2$	(e) $f(x) = \|2 - 3x\|$	(f) $f(x) = -\|1 - x\|$
(g) $f(x) = x^2 - \|x\| - 2$	(h) $f(x) = x^2 - \|2x - 1\|$	(i) $f(x) = \|x + 1\| - x$
(j) $f(x) = x + \|x\|$	(k) $f(x) = \|x + 1\| - \|1 - x\|$	(ℓ) $f(x) = 1 + 2^{x+1}$
(m) $f(x) = 1 - 2^{x-1}$	(n) $f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$	(o) $f(x) = \|2^{1-x} - 2\|$
(p) $f(x) = \log_2(1 - x)$	(q) $f(x) = 1 - 2\log_2(x - 2)$	(r) $f(x) = 1 + \|\log_{\frac{1}{2}}(1 - x)\|$

8. Sejam as funções f, g, h definidas em reais, cujas leis são dadas por: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \dfrac{4x - 1}{2}$.
   (a) Esboce o gráfico de $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicando domínio e imagem. Se for inversível, obtenha $(g \circ f)^{-1}$.
   (b) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais:
   (a) $f(x) \geq g(x)$. (b) $g(x) < h(x)$. (c) $f(x) \geq h(x)$.

9. O gráfico de uma função f é o segmento de reta que une os pontos $P(-3, 4)$ e $Q(3, 0)$. Defina formalmente esta função (i.e., diga quem são os conjuntos A e B tais que $f : A \to B$). Obtenha a função inversa f^{-1} e esboce num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}.

10. Esboçar o gráfico de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, indicando domínio e imagem.

11. Definimos a *função maior inteiro* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ por
$$f(x) = |[x]|,$$
onde $|[x]|$ denota o maior inteiro menor ou igual a x. Assim, por exemplo, $f(2,31) = 2$, pois 2 é o maior inteiro que é menor que $2,31$.
Esboce o gráfico dessa função, indicando domínio e imagem. f é injetiva? É sobrejetiva? Justifique.

12. Para que um medicamento faça o efeito desejado a sua concentração na corrente sangüínea deve ser acima do nível terapêutico mínimo. Se a concentração c desse medicamento t horas após ser ingerido é dada por $c = \frac{20t}{t^2+4}$ mg/L e o seu nível terapêutico mínimo é 40 mg/L, determine a partir de que instante esse nível é excedido.

13. Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x + 1| + |x - 1|$.

14. Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + |x - 1|$. Ela seria injetiva? E sobrejetiva?

15. Sejam f e g funções cujas leis são dadas respectivamente por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Esboçar os gráficos de f e g, indicando domínio e imagem.

16. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas respectivamente por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

(a) Esboçar os gráficos de f e g, indicando domínio e imagem. Elas são bijetivas? Comente.

(b) Determine as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4 - 11x - 3x^2$.

(a) Encontre os zeros de f, se existirem, as coordenadas do vértice e esboce o gráfico da f.

(b) Redefina f de modo a ser inversível (i.e., ache conjuntos A e B de modo que $f : A \to B$ seja bijetiva) e obtenha f^{-1}.

(c) Considerando a f redefinida no item anterior e f^{-1} obtida, esboçar seus gráficos num mesmo plano cartesiano.

(d) Confirme que $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.

18. Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2\}$ e a função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Obtenha a função inversa de f. Representar os esboços gráficos de f e f^{-1} num mesmo plano cartesiano ortogonal.

19. Determine os valores de m para que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = (m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1)$ não tenha zeros reais.

20. A parábola de equação $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, v)$. Determine v.

21. Construa o gráfico de cada função a seguir, indicando domínio e imagem.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{se } x \geq 1 \\ x - 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = |2x - 2| + |x + 3|$

(c) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(d) $f(x) = x^2 + |x^2 - 1|$

22. Esboçar os gráficos de $f(x) = x|x|$, $g(x) = x - |x|$, $h(x) = (x - 1)|x + 1|$ e $i(x) = 1 + |x - |x||$, indicando seus respectivos domínio e imagem.

23. Represente geometricamente a região do plano cartesiano onde $g(x) > 0$ e $i(x) \leq 0$, sendo g e i as funções dadas no exercício anterior.

24. Se $\log_b a = \log_a b$, que relação existe entre a e b?

25. (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

a) β. b) 24. c) 10^4. d) $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{4}$. e) $\sqrt{6}$.

26. (PUC-SP) Uma calculadora eletrônica possui as teclas das quatro operações fundamentais e as teclas 10^x, $\log_{10}$ e ln. Como obter o valor de e usando as funções da calculadora?

27. Considerando as aproximações $\log 2 = 0,30$ e $\log 7 = 0,85$, determine:

(a) $\log 14$ (b) $\log 50$ (c) $\log 3,5$ (d) $\log 0,28$ (e) $\log 25$

28. Se $0 < x \neq 1$, demonstre que

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + ... + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\log_x^2 2}.$$

Sugestão: escreva $\dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

29. Qual é a diferença, se existe, entre as expressões: $\ln(\ln x)$, $\ln^2 x$ e $(\ln x)^2$?

30. Esboçar o gráfico de cada função cuja lei é dada em cada item a seguir, indicando domínio e imagem.
(a) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$ (b) $f(x) = |1 - 2^{x-1}|$
(c) $f(x) = \log_2(x-3)$ (d) $f(x) = 1 - 2\log_2(1-x)$
(e) $f(x) = |1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)|$ (f) $f(x) = 1 + \ln(x-2)$

31. (IME - RJ) Dada a função $f(x) = \dfrac{156^x + 156^{-x}}{2}$, demonstre que

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

32. Esboce o gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } -2 < x \leq 2 \\ x, & \text{se } x \leq -2 \\ 4, & \text{se } x > 2 \end{cases},$$

indicando domínio e imagem.

33. Obtenha o domínio máximo Ω da função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2x+4}} - \ln\sqrt{x+1}.$$

34. Determine os pontos comuns aos gráficos das funções $y = e^x$ e $y = -\log|x|$, $x \neq 0$.

35. Seja $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 2)$ dada por $f(x) = 2 - 2^{1+x}$. Obtenha f^{-1} e construa num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}, indicando domínio e imagem de cada uma.

36. (UFPel-RS) *Ondas sísmicas são vibações provocadas por terremotos que acontecem na Terra. Sismógrafos são aparelhos que gravam tais vibrações, usando traços em ziguezague que mostram a variação de amplitude dos terremotos. A duração, a localização e a magnitude de cada fenômeno podem ser determinadas por estes aparelhos, instalados em estações sismológicas, em todo o mundo.*
A escala Richter foi desenvolvida por Charles F. Richter, em 1935, no Instituto Tecnológico da califórnia, EUA, para comparar dados e efeitos dos abalos sísmicos.
Richter usou a fórmula abaixo para determinar uma escala para a medição da força dos terremotos:

$$M = \log A + 3\log(8\Delta t) - 2,92,$$

em que M é a magnitude do terremoto (o que originou a tabelha Richter), A é a amplitude (em milímetros) do terremoto, medida em um sismógrafo, e Δt é o intervalo (em segundos) entre as ondas superficial e de pressão máxima, também medidas no sismógrafo.

MARCONDES, G.S. *Matemática.*
São Paulo: Ática, 2003 [adaptado]

Com base no texto acima, diga qual é a amplitude, em milímetro, de um terremoto cuja magnitude assume o valor de 2,3731 - que, segundo a tabela de Richter, não é sentido, mas gravado -, sabendo que o intervalo de tempo entre as ondas superficial e de pressão máxima é de 4 segundos (Considere $\log 3 = 0,4771$ e $\log 6 = 0,7781$).

37. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 0,8% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?

38. Um cartão de crédito cobra juros de 9% ao mês sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de $505,00$ reais. Em quanto tempo essa dívida chegará a $1000,00$ reais se não for paga?

39. Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.

    (a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

    (b) E em um período de t anos?

40. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?

41. Qual é a *meia vida*[1] de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

42. Um fármaco (remédio) tem a meia-vida de 6 horas e as concentrações mínima eficaz e máxima tolerada no corpo humano são respectivamente 210 e 680 microgramas por mililitro. Qual é a dosagem indicada para esse fármaco e em que intervalo de tempo deve-se repetir a dosagem?

43. (VUNESP) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade de Sr_{38}^{90} radioativo, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de Sr_{38}^{90} se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, o local poderá ser habitado novamente a partir do ano de

    (a) 2014 (b) 2098 (c) 2266 (d) 2986 (e) 3000

44. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era $0,145$ vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas (Obs.: A meia vida do C^{14} é 5730 anos).

45. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

46. Nos Jogos olímpicos de 1968, nos arredores da Cidade do México, houve muita discussão a respeito do efeito que a grande altitude (2237 metros) poderia causar aos atletas. Presumindo que a pressão atmosférica decaia exponencialmente em 0,4% a cada 30 metros, a qual percentual fica reduzida a pressão atmosférica ao se deslocar do mar até a Cidade do México?

[1] Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25kg e, assim, sucessivamente.