Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Pré-Cálculo
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 05 de Exercícios - Funções

1. (U.E. CE-80) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes propriedades:

   (a) $f(0) = 1$

   (b) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)\,, \forall x, y \in \mathbb{R}$

   (c) $0 < f(1) < 1$

   Com estas informações, obtenha, em função de $f(1)$, o valor da soma

   $$f(0) + f(1) + f(2) + ... + f(9).$$

2. Se m e n são zeros da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, c \neq 0$, qual é o valor de $\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2}$?

3. Construa exemplos de funções que sejam:

   (a) injetivas, mas não sobrejetivas;

   (b) sobrejetivas, mas não injetivas;

   (c) bijetivas.

4. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$.

   (a) f é injetiva?

   (b) f é sobrejetiva?

   (c) Determine $f^{-1}(\{0\})$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$.

   (a) f é injetiva? Justifique.

   (b) f é sobrejetiva? Justifique.

   (c) Represente geometricamente em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (i.e., no plano cartesiano), o conjunto $[0, 1]\times[0, 1]$. Em seguida, represente geometricamente, $f([0, 1] \times [0, 1])$.

6. Mostre que se $f : A \to B$ é estritamente crescente, então f é injetiva. Idem para estritamente decrescente.

7. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ definida por $f(x, y) = (3x - 2, 2y + 5)$. Prove que f é injetiva. A função f é sobrejetiva? Justifique.

8. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{10 + 3x}{10 - 2x}$. Pede-se:
   a) Determinar o domínio máximo D.
   b) Mostrar que f é injetiva.
   c) Verificar se f é sobrejetiva.(Sugestão: verifique se $z = -\frac{3}{2}$ é imagem de algum domínio da f.)

9. Dizemos que dois conjuntos A e B são *equivalentes* quando existir uma bijeção entre eles. Com base nesta definição, mostre que são equivalentes os seguintes conjuntos:
   (a) $[-2, 2]$ e $[0, 1]$. (b) $(3, 5]$ e $[-2, 7)$. (c) $(2, 9)$ e $(0, 1)$.

10. Os conjuntos $(-2, 7)$ e $[5, 11)$ são equivalentes? Justifique.

11. Prove que a aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ com a e b constantes reais e $a \neq 0$, é bijetiva.

12. Mostre que a função $f : \mathbb{R} - \{\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\}$ definida pela lei $f(x) = \dfrac{ax-b}{cx-d}$, em que a, b, c e d são constantes reais, $c \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$, é uma aplicação bijetiva.

13. Sejam $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de conjuntos, com $X_\lambda \subset A$, $\forall\lambda \in \Lambda$ e $f : A \to B$ uma função. Mostre que
$$f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(X_\lambda).$$

14. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer em um universo E e $(M_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$ em E tal que $M_i \subset A, \forall i \in I$. Considere $f : A \to B$ uma função. Mostre que
$$f\left(A \cap \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right)\right) \subset \bigcup_{i\in I} f\left(A \cap M_i\right).$$

15. Seja $f : A \to B$ uma função e $M, N \subset B$. Mostre que
$$f^{-1}(M - N) = f^{-1}(M) - f^{-1}(N).$$

16. Seja $f : A \to B$ uma função e $(B_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$, tal que $B_i \subset B$, $\forall i \in I$. Mostre que
$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

17. Verifique mediante um exemplo que a composição de funções, em geral, não é comutativa.

18. Sejam as funções f e g cujas leis são dadas por $f(x) = x^2 + 2x + 3$ e $g(x) = x^2 + ax + b$. Mostre que se $f \circ g = g \circ f$, então $f = g$.

19. Sejam f e g funções reais definidas pelas leis
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x - 3.$$
Obtenha a lei que define $f \circ g$.

20. Sejam $f : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ dadas por
$$f(x) = \det(x) \;\text{ e }\; g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$
    (a) Obtenha $g \circ f$ e calcule $(g \circ f)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
    (b) Mostre que $g \circ f$ não é bijetiva.

21. Sejam as funções $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$; identidade em A, anotada por I_A, de A em A e definida por $I_A(x) = x$ e identidade em B, anotada por I_B, de B em B e definida por $I_B(x) = x$.
    (a) Prove que $f \circ I_A = f$ e $I_B \circ f = f$.
    (b) As funções I_A e I_B são iguais? Justifique.

22. Sendo f e g duas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f \circ g(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2 - x$, obtenha $f(x)$.

23. Sejam as aplicações $f : A \to B$, $g : A \to B$ e $h : B \to D$. Prove que se h é injetiva e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.

24. Seja f a função dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
    (a) Determine o domínio de f, i.e., $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } \exists f(x)\}$.
    (b) Determine $f(A)$.
    (c) A função f é sobrejetiva? Justifique.

25. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada pela lei $f(n) = 2n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ é injetiva, mas não sobrejetiva.