Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turmas T1 e T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios - Algumas respostas

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 (x+2)dx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^3 |x-2|dx$

2. Calcule $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ diretamente da definição de integral, assumindo que esta integral exista.

3. Idem para $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

4. Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^2-6x)dx$, usando uma partição regular.

5. Calcule $\displaystyle\int_2^5 (1-x-2x^2)dx$, usando uma partição regular do intervalo $[2,5]$.

6. Seja c um ponto do intervalo $[a,b]$ e α um número real. Mostre que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

   é integrável, e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

   Solução. Se $\alpha = 0$, então f é identicamente nula e não temos mais nada a fazer. Considere, então, o caso $\alpha \neq 0$.

   Tomando $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição regular de $[a,b]$, que divide o intervalo em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$, com $i \in \{1,2,...,n\}$ de comprimento $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, temos, pela definição da f dada, que existe apenas um índice i_0 tal que $c \in [t_{i_0-1}, t_{i_0}]$.

   Vamos construir a soma superior:

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}).$$

   Como $M_i = 0$ para todo $i \neq i_0$ e $M_{i_0} = \alpha$ (e além disso

$$t_i = \alpha + i\frac{b-a}{n}),$$

   temos que

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \alpha\frac{b-a}{n},$$

   pois os demais termos da soma são nulos. Assim, refinando a partição fazendo n tender ao infinito, vamos obter

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f;P) = \lim_{n\to\infty} \alpha\frac{b-a}{n} = 0.$$

   Analogamente se mostra que a integral inferior também resulta em zero. Portanto, f é integrável e $\int_a^b f = 0$.

7. Generalize o exercício anterior para o caso de um número finito de pontos $c_1, c_2, ..., c_n$ no intervalo $[a, b]$.

8. Dê um exemplo de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que não seja integrável, mas seja *módulo-integrável* (i.e., $|f|$ é integrável).

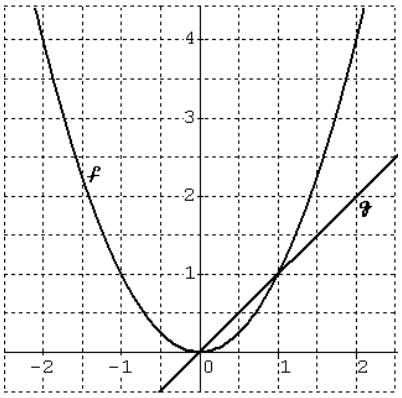
   Solução. Por exemplo, uma variante da função de Dirichlet, como
   $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
   É fácil ver que $\underline{\int}_0^1 f = -1$ e $\overline{\int}_0^1 f = 1$ e, portanto, f não é integrável. Porém, repare que $|f(x)| = 1$, $\forall x \in [0, 1]$, logo, se verifica facilmente que $|f|$ é integrável, com $\int_0^1 |f| = 1$ (complete os detalhes deste esboço da solução).

9. Justifique por que $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \geq \int_0^1 x^2 dx$ e por que $\displaystyle\int_1^2 x\,dx \leq \int_1^2 x^2 dx$.

   Solução. Por um resultado de aula temos que

$$f \leq g \text{ em } [a, b] \Leftrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

   Assim, observando os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$ temos



   Portanto, em $[0, 1]$ temos $f(x) \leq g(x)$ e então $\displaystyle\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x\,dx$.
   Em $[1, 2]$ temos $f(x) \geq g(x)$ e então $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx \geq \int_1^2 x\,dx$.
   Isto conclui o exercício.

10. Suponha que f e g sejam integráveis, com $\displaystyle\int_1^9 f = -1$, $\displaystyle\int_7^9 f = 5$ e $\displaystyle\int_7^9 g = 4$. Determine:

    (a) $\displaystyle\int_1^9 -2 \cdot f$ (b) $\displaystyle\int_7^9 f + g$ (c) $\displaystyle\int_7^9 3f - 3g$ (d) $\displaystyle\int_9^1 f$ (e) $\displaystyle\int_1^7 f$

11. Se a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a, b]$, definimos o *valor médio* VM de f no domínio $[a, b]$ por

$$VM = \frac{\int_a^b f}{b - a}.$$

    Encontre o valor médio para $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

    Solução. Queremos calcular

$$VM = \frac{\int_1^3 x^2 dx}{3 - 1} = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx.$$

Considere P_n a partição regular dada por

$$P_n = \{t_0 = 1 < t_1 < t_2 < ... < t_n = 3\},$$

onde

$$t_1 = 1 + \frac{2}{n};$$

$$\vdots$$

$$t_i = 1 + i\frac{2}{n};$$

$$\vdots$$

$$t_n = 1 + n\frac{2}{n} = 3.$$

Repare que, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $t_i - t_{i-1} = \dfrac{2}{n}$.
Como f é crescente em $[1, 3]$, temos

$$m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_{i-1}) = \left(1 + (i-1)\frac{2}{n}\right)^2 = 1 + (i-1)\frac{4}{n} + (i-1)^2\frac{4}{n^2}$$

e

$$M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i-1}]} f(x) = f(t_i) = \left(1 + i\frac{2}{n}\right)^2 = 1 + \frac{4i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}.$$

Portanto, calculando as somas inferiores, temos

$$s(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{4(i-1)}{n} + (i-1)^2\frac{4}{n^2}\right)\frac{2}{n} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8(i-1)}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}(i-1)^2 =$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i - \frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 =$$

$$= \frac{2}{n}n + \frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n^2}n + \frac{8}{n^3}\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} =$$

$$= 2 + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{8}{n} + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{26}{3}.$$

Portanto, $s(f; P_n) \to \dfrac{26}{3}$ quando $n \to +\infty$. Em particular

$$\underline{\int_{-1}^{3}} x^2 dx = \inf\{s(f; P_n) : P_n \text{ é partição de } [1, 3]\} = \frac{26}{3}.$$

Analogamente, mostramos que a integral superior também vale $\dfrac{26}{3}$. Portanto, f é integrável e daí

$$VM = \frac{1}{2}\int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{26}{3} = \frac{13}{3}.$$

12. Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ (i.e., f é limitada em $[a,b]$), mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Solução. Basta aplicar na desigualdade dada a propriedade de integral definida que diz que se $f \leq g$, então $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ e demais propriedades. Assim,

$$\begin{aligned} m \leq f(x) \leq M &\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \\ &\Rightarrow m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx \\ &\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq m(b-a). \end{aligned}$$

13. Use o resultado do exercício anterior para estimar o valor de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2} dx$. (Sugestão: considere os valores mínimo e máximo de f em seu domínio)

14. Sendo f contínua em seu domínio, mostre que

$$\left| \int_0^{2^\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x \, dx \right| \leq \int_0^{2^\pi} |f(x)| \, dx$$

Solução. Basta usar propriedades dos módulos com integrais:

$$\left| \int_0^{2^\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x \, dx \right| \leq \int_0^{2^\pi} |f(x) \cdot \operatorname{sen} 2x| \, dx = \int_0^{2^\pi} |f(x)| \cdot |\operatorname{sen} 2x| \, dx,$$

e, como $|\operatorname{sen} 2x| \leq 1$, $\forall x$, obtemos

$$\left| \int_0^{2^\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x \, dx \right| \leq \int_0^{2^\pi} |f(x)| \cdot |\operatorname{sen} 2x| \, dx \leq \int_0^{2^\pi} |f(x)| \cdot 1 \, dx,$$

donde segue a desigualdade desejada.

15. Se f é integrável (e então limitada) em $[a,b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Solução. Usando a propriedade $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ e o fato de f ser limitada, temos

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|dx =$$

$$= \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \int_a^b dx = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot (b-a).$$

16. **Regra do ponto médio.** Podemos estimar o valor de $\int_a^b f$ tomando pontos médios $\bar{t_i}$ dos subintervalos da partição regular de $[a,b]$. Fixando o número n de subintervalos, obtemos a estimativa

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{t_i}) \Delta t_i,$$

onde $\Delta t_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Isto posto, estime os valores das integrais abaixo, considerando o número n de subintervalos destacado em cada caso:

(a) $\displaystyle\int_0^5 x^3 dx$, com $n = 5$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2x-7} dx$, com $n = 4$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$, com $n = 10$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$, com $n = 4$

17. Use a fórmula

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + ... + \sin mh = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

(a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.

(b) Determine $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(f;P)$.

Solução. Seja $P_n = \{0, \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, ..., \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\}$ uma partição regular do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, onde $t_i = i \cdot \frac{\pi}{2n}$.
Como $f(x) = \sin x$ é crescente no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ segue que

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i) = \sin t_i.$$

Note também que cada subintervalo tem comprimento $t_i - t_{i-1} = \dfrac{\pi}{2n}$.
Montando a soma superior de f em relação à partição regular P_n, temos

$$S(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sin t_i \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin t_i =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{t_1}{2} - \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t_1\right]}{2\sin\frac{t_1}{2}} = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

Isto responde o item (a), ou seja,

$$S(f;P_n) = \frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

Para responder o item (b), basta passar o limite com n tendendo para $+\infty$. Convém lembrar que usaremos o seguinte limite notável

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

nos cálculos seguintes. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} S(f;P_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\cdot\frac{\pi}{4n}\frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4n}\right)}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{4n} - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n}\right)}{2} = 2 \cdot \frac{\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}}{2} = 2 \cdot \frac{1+0}{2} = 1.$$

18. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists\, K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0,1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$

Solução. Como $\int_0^1 dx = 1$ temos, juntamente com as propriedades da integral definida:

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \int_0^1 dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right] dx \right| = \left| \frac{1}{n}\int_0^1 \left[nf(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \right] dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n}\int_0^1 \left[f(x) - f(\frac{1}{n}) + f(x) - f(\frac{2}{n}) + \ldots + f(x) - f(\frac{n}{n}) \right] dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left\{ \int_0^1 |f(x) - f(\frac{1}{n})|dx + \int_0^1 |f(x) - f(\frac{2}{n})|dx + \ldots + \int_0^1 |f(x) - f(\frac{n}{n})|dx \right\}$$

$$\leq \frac{1}{n}\left\{ \int_0^1 K|x - \frac{1}{n}|dx + \ldots + \int_0^1 K|x - \frac{n}{n}|dx \right\} =$$

$$= \frac{K}{n^2}\left\{ \int_0^1 |nx - 1|dx + \ldots + \int_0^1 |nx - n|dx \right\} = (\star)$$

Para cada i, notando que

$$|nx - i| = \begin{cases} nx - i, & \text{se } \ 0 \leq x < \frac{i}{n} \\ i - nx, & \text{se } \ \frac{i}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

temos

$$\int_0^1 |nx - i|dx = \int_0^{\frac{i}{n}} (nx - i)dx + \int_{\frac{i}{n}}^1 (i - nx)dx,$$

iremos encontrar o valor de cada integral, que somadas[1], para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, achamos

$$i - \frac{n}{2} - \frac{i^2}{n},$$

portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |nx - i|dx = \sum_{i=1}^{n} \left[i - \frac{n}{2} - \frac{i^2}{n} \right] =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Portanto,

$$(\star) = \frac{K}{n^2}\left(\frac{n}{2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{K}{n}\left(\frac{1}{2} - (1 + \frac{1}{n})\frac{2n+1}{6} \right) \leq \frac{K}{2n}.$$

Isto conclui o exercício.

[1] O cálculo destas integrais deixo a encargo do estudante aventureiro.