Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II - Turma T1
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Integração por partes

1. Calcule cada integral a seguir, usando a integração por partes.

(a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$ (b) $\displaystyle\int x \sec^2 x \, dx$ (c) $\displaystyle\int \operatorname{arccot} x \, dx$

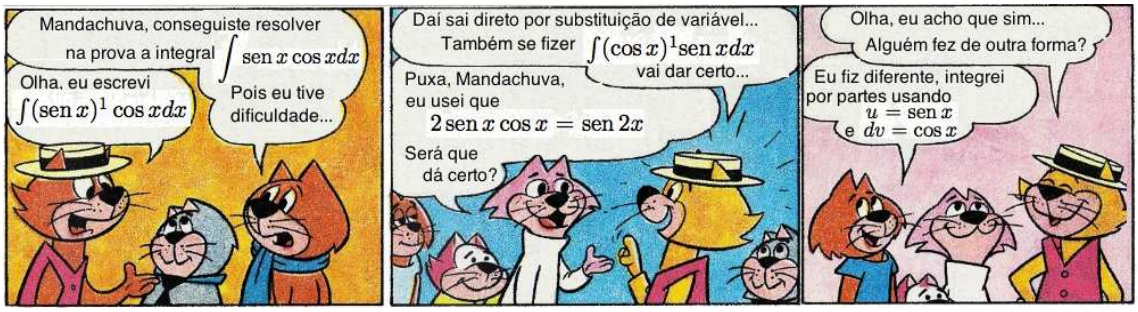
(d) $\displaystyle\int \arccos 2x \, dx$ (e) $\displaystyle\int x^2 e^{-x} dx$ (f) $\displaystyle\int \ln x \, dx$

(g) $\displaystyle\int x^2 \arcsin x \, dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\ln x \, dx}{(x+1)^2}$ (i) $\displaystyle\int \arctan \sqrt{x} \, dx$

(j) $\displaystyle\int e^{2x} \cos 3x \, dx$ (k) $\displaystyle\int (x^3 - 3x + 1) \ln x \, dx$

(l) $\displaystyle\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{2}} \, dx$ (m) $\displaystyle\int \csc^3 x \, dx$ (n) $\displaystyle\int e^{2x} \sin \frac{x}{2} \, dx$

2. Leia atentamente a tira abaixo, adaptada da Turma do Mandachuva.



O problema que os personagens discutem consiste na resolução da integral indefinida

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx.$$

Pela narrativa da tira, existem diferentes formas de se calcular essa integral.

(a) Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ usando a dica que o Mandachuva dá no primeiro quadro.

(b) Mandachuva também comenta, no segundo quadro, outra forma de resolver o problema acima. Resolva-o dessa outra forma também.

(c) O personagem Chuchu, que está de camiseta branca, no segundo quadro, faz a mudança $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$. Resolva dessa forma o mesmo problema.

(d) No terceiro quadro, um terceiro personagem afirma ter usado integração por partes. Veja se é possível resolver dessa forma.

(e) Cada caso resolvido acima apresenta uma resposta aparentemente diferente, no entanto, todas elas são equivalentes. Você saberia explicar isso ao personagem Batatinha (o mais baixo no terceiro quadro)?

3. Deduza a seguinte *fórmula de recorrência*: dado $r \in \mathbb{R}$, vale a fórmula:

$$\int x^r e^x dx = x^r e^x - r \int x^{x-1} e^x dx.$$

4. Use a fórmula do exercício anterior para calcular $\displaystyle\int x^4 e^x dx$.

5. Deduzir, onde $r \in \mathbb{R}$, a fórmula:

$$\int x^r \ln x \, dx = \begin{cases} \dfrac{x^{r+1}}{r+1} \ln x - \dfrac{x^{r+1}}{(r+1)^2} + c, & \text{se} r \neq -1 \\ \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + c, & \text{se} r = -1 \end{cases}$$

Em seguida, calcule $\displaystyle\int x^{12} \ln x \, dx$.

6. Mostre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, vale

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Em seguida, calcule $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx$.

7. Calcule cada integral definida a seguir:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \ln(x+2) dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{2x} \, dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{-x} dx$

8. Mostre que $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arcsen} x dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.