Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Pré-Cálculo
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios - Corpos

1. Seja E o conjunto universo e considere o conjunto $F = \{A : A \subset E\}$, munido com as operações de união e intersecção de conjuntos. Mostre que $(F, \cup, \cap)$ não é um corpo.

2. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Utilizando-se os axiomas, prove cada igualdade a seguir:

   (a) $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

   (b) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

   (c) $-(-x) = x$

   (d) $-(x - y) = y - x$

3. Mostre que $(x^{-1})^{-1} = x\,, \forall x \in \mathbb{K} - \{0\}$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo.

4. Sejam x e y, ambos positivos em um corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $x < y$. Prove que $y^{-1} < x^{-1}$.

5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Prove os seguintes fatos:

   (a) (*Unicidade do zero)* Se $0^{'} \in \mathbb{K}$ é tal que $x + 0^{'} = x\,, \forall x \in \mathbb{K}$, então $0^{'} = 0$.

   (b) (*Unicidade da unidade)* Se $1^{'} \in \mathbb{K}$ é tal que $x \cdot 1^{'} = x\,, \forall x \in \mathbb{K}$, então $1^{'} = 1$.

   (c) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a + x = b$ tem solução única.

   (d) Dados $a, b \in \mathbb{K}$, mostre que a equação $a \cdot x = b$ tem solução única.

6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Prove as seguintes propriedades:

   (a) $x > y$ e $y > z \;\; \Rightarrow x > z$.

   (b) $x > 0$ e $y < 0 \;\; \Rightarrow x \cdot y < 0$.

   (c) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

7. (**Relação de equivalência**) Dizemos que uma relação binária $\sim$ entre os elementos de um conjunto A é uma *relação de equivalência* sobre A se, $\forall x, y, z \in A$ tivermos válidas as propriedades:

   (a) $x \sim x$ (propriedade reflexiva)

   (b) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (propriedade simétrica)

   (c) $x \sim y$ e $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (propriedade transitiva)

   A relação de igualdade entre elementos de um conjunto goza das três propriedades acima. Logo, $=$ é uma relação de equivalência (verifique!). Na geometria, a semelhança de triângulos também é uma relação de equivalência (verifique!). Já a relação de ordem $\leq$ não é de equivalência, pois ao invés da propriedade de simetria, vale a anti-simetria: $x \leq y$ e $y \leq x$ implicam em $x = y$. A contenção $\subset$ entre conjuntos também não é relação de equivalência pelo mesmo motivo. Prove que a congruência módulo n definida no exemplo 5 do item 2.2 é uma relação de equivalência.

8. Dados a, b, ε num corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $\varepsilon > 0$, prove que

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

9. Prove cada afirmação a seguir caso seja verdadeira, ou exiba um contra-exemplo caso seja falsa:

   (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.

   (b) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

10. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.

11. Representar $\sqrt{5}$ sob a forma de uma fração contínua.
Sugestão. Escreva $\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2$.

12. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

13. Seja $\mathbb{K}$ um corpo ordenado. Exprima cada um dos conjuntos abaixo como reunião de intervalos:

    (a) o conjunto dos $x \in \mathbb{K}$ tais que $|x^2 - 2| \leq 1$;

    (b) o conjunto dos $x \in \mathbb{K}$ tais que $|2x + 1| \leq 1$;

    (c) o conjunto dos $x \in \mathbb{K}$ tais que $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| \leq \dfrac{2}{3}$.

14. Num corpo ordenado $\mathbb{K}$, prove que $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

15. Dados x, y num corpo ordenado $\mathbb{K}$, com $y \neq 0$, prove que $|x \cdot y^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$.

16. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, prove que se para todo $\varepsilon > 0$, $a < b + \varepsilon$, então $a \leq b$.

17. Nos itens a seguir, encontre todos os números reais que satisfazem cada desigualdade. Dê o intervalo-solução e ilustre a solução sobre uma reta numérica.

    (a) $5x + 2 > x - 6$.

    (b) $3 - x < 5 + 3x$.

    (c) $3x - 5 < \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1-x}{3}$.

    (d) $2 \leq 5 - 3x < 11$.

    (e) $\dfrac{2}{1-x} \leq 1$.

    (f) $x^2 \leq 9$.

    (g) $x^2 + 3x + 1 > 0$.

    (h) $\dfrac{1}{3x-7} \geq \dfrac{4}{3-2x}$.

18. Considerando o corpo ordenado dos reais, determine se cada item a seguir é verdadeiro ou falso, dando a razão de sua decisão.

    (a) $x < 5$ implica em $|x| < 5$.

    (b) $|x - 5| < 2$ implica em $3 < x < 7$.

    (c) $|1 + 3x| \leq 1$ implica em $x \geq -\frac{2}{3}$.

19. Determine todos os valores de reais de x para os quais se verifiquem as seguintes desigualdades:

    (a) $\left|\dfrac{3x+1}{2x-3}\right| \leq \dfrac{2}{3}$

    (b) $\left|\dfrac{1-4x}{2x-5}\right| \geq \dfrac{3}{2}$

20. Demonstre, no corpo dos reais, as seguintes desigualdades:

    (a) $|xy - ab| \leq |x||y - b| + |b||x - a|$

    (b) $|xy - ab| \leq (|x - a| + |a|)|y - b| + |b||x - a|$

    (c) $|xy - ab| < (1 + |a|)|y - b| + |b|$, se $|x - a| < 1$.

21. Considerando o corpo ordenado dos reais, determine δ_1 e δ_2 tais que

$$|x - \sqrt{2}| < \delta_1 \text{ e } |y - \sqrt{3}| < \delta_2 \Rightarrow |xy - \sqrt{2}\sqrt{3}| < \varepsilon,$$

para $\varepsilon > 0$ dado[1]. Sugestão: utilize o item (b) do exercício anterior.

[1] Este tipo de majoração com módulos será comum em Cálculo.