Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turmas T1 e T2
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^2 (x-1)dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 (x+2)dx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^3 |x-2|dx$

2. Calcule $\displaystyle\int_0^1 x\,dx$ diretamente da definição de integral, assumindo que esta integral exista.

3. Idem para $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2, & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

4. Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^2-6x)dx$, usando uma partição regular.

5. Calcule $\displaystyle\int_2^5 (1-x-2x^2)dx$, usando uma partição regular do intervalo $[2,5]$.

6. Seja c um ponto do intervalo $[a,b]$ e α um número real. Mostre que a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \ne c \end{cases}$$

   é integrável, e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

7. Generalize o exercício anterior para o caso de um número finito de pontos $c_1, c_2, ..., c_n$ no intervalo $[a,b]$.

8. Dê um exemplo de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que não seja integrável, mas seja *módulo-integrável* (i.e., $|f|$ é integrável).

9. Justifique por que $\displaystyle\int_0^1 x\,dx \ge \int_0^1 x^2 dx$ e por que $\displaystyle\int_1^2 x\,dx \le \int_1^2 x^2 dx$.

10. Suponha que f e g sejam integráveis, com $\displaystyle\int_1^9 f = -1$, $\displaystyle\int_7^9 f = 5$ e $\displaystyle\int_7^9 g = 4$. Determine:

    (a) $\displaystyle\int_1^9 -2\cdot f$ (b) $\displaystyle\int_7^9 f+g$ (c) $\displaystyle\int_7^9 3f-3g$ (d) $\displaystyle\int_9^1 f$ (e) $\displaystyle\int_1^7 f$

11. Se a função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$, definimos o *valor médio* VM de f no domínio $[a,b]$ por

$$VM = \frac{\int_a^b f}{b-a}.$$

    Encontre o valor médio para $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

12. Se f é integrável e m e M são tais que $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$ (i.e., f é limitada em $[a,b]$), mostre que

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a).$$

13. Use o resultado do exercício anterior para estimar o valor de $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$. (Sugestão: considere os valores mínimo e máximo de f em seu domínio)

14. Sendo f contínua em seu domínio, mostre que

$$\left| \int_0^{2^\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x \, dx \right| \leq \int_0^{2^\pi} |f(x)| \, dx$$

15. Se f é integrável (e então limitada) em $[a, b]$, mostre que

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

16. **Regra do ponto médio.** Podemos estimar o valor de $\int_a^b f$ tomando pontos médios $\bar{t_i}$ dos subintervalos da partição regular de $[a, b]$. Fixando o número n de subintervalos, obtemos a estimativa

$$\int_a^b f \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t_i}) \Delta t_i,$$

onde $\Delta t_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Isto posto, estime os valores das integrais abaixo, considerando o número n de subintervalos destacado em cada caso:

(a) $\displaystyle\int_0^5 x^3 dx$, com $n = 5$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{2x-7} dx$, com $n = 4$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+x^2} \, dx$, com $n = 10$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$, com $n = 4$

17. Use a fórmula

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + ... + \sin mh = \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos\left(\left(m + \frac{1}{2}\right) h\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

(a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.

(b) Determine $\lim\limits_{n \to +\infty} S(f; P)$.

18. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists\, K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0, 1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$