Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Pré-Cálculo
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios

1. Considerando o conjunto $A = \{1, \{1\}, \emptyset, \{\emptyset\}, A\}$, assinale cada item a seguir em verdadeiro ou falso, justificando:

   (a) $A \in A$. (b) $\emptyset \in A$. (c) $\{1\} \subset A$. (d) $\{1\} \in A$.
   (e) $\{A\} \in A$ (f) $\{1, \{1\}\} \in A$. (g) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. (h) $\{1, A\} \subset A$.

2. Seja $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ o espaço fundamental. Ache o complementar de cada conjunto que segue.
   a) $\{1\}$. b)$\{$ 2,4$\}$. c) $\{$1,2,3,4,5 $\}$.

3. Dados os conjuntos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e as duas partes de E: $A = \{1, 4, 5, 6\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, determinar:
   a) $\complement_E(A)$; b) $\complement_E(B)$; c) $\complement_E(A) \cup \complement_E(B)$; d) $A \cup \complement_E(B)$.

4. Sabendo que X é um conjunto qualquer, diga quais das sentenças a seguir são verdadeiras.
   a) $X \in P(X)$. b) $X \subset P(X)$.
   c) $\{X\} \subset P(X)$. d) $\{X\} \in P(X)$.

5. Construir possíveis diagramas de Venn:

   (a) de dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$ e $A \neq B$;
   (b) de dois conjuntos A e B *não comparáveis*[1].

6. Dados os conjuntos:

$$A_1 = \{1, 10\},\ A_2 = \{2, 4, 6, 10\},\ A_3 = \{3, 6, 9\},$$

$$A_4 = \{4, 8\},\ A_5 = \{5, 6, 10\}.$$

   Calcular:

   (a) $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$, sendo $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
   (b) $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$, sendo $I = \{2, 3, 5\}$.

7. Sejam os conjuntos dados por $A_n = \{x : x \text{ é múltiplo de } n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Calcule $A_3 \cap A_5$ e $A_4 \cap A_6$.

8. Prove a unicidade do conjunto vazio.

9. Demonstrar a implicação $D \subset A$, $D \subset B$ e $D \subset C \Rightarrow D \subset (A \cap B \cap C)$.

10. Simplificar as expressões:

    (a) $[A \cap (A^{\complement} \cup B)]^{\complement} \cup B$
    (b) $(A^{\complement} \cup B) \cap (A^{\complement} \cup B^{\complement})$

11. Verifique a igualdade: $(A \cap C) \cap (B \cup C) = A \cap C$.

12. Demonstrar que $B - A$ é subconjunto de $A^{\complement}$.

13. Sejam A e B conjuntos tais que $A \cap B = A \cup B$. Prove que $A = B$.

[1] Dizemos que dois conjuntos A e B são *comparáveis* quando $A \subset B$ ou $B \subset A$. Eles são *não-comparáveis* se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$.

14. Se A e B são conjuntos arbitrários, demonstre as seguintes propriedades, conhecidas como leis da absorção:
(a) $A \cap (A \cup B) = A$; (b) $A \cup (A \cap B) = A$.

15. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$. Prove que $B = C$.

16. Sejam X e Y conjuntos finitos, prove as seguintes propriedades

    (a) $X \subset Y \Rightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$;
    (b) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$;

17. Seja $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

    (a) Quantos elementos possui $\mathcal{P}(A)$? Liste-os.
    (b) As afirmações $\{1, 2\} \in A$ e $\{1, 2\} \subset A$ são ambas verdadeiras. Por quê?

18. Sejam $A, B \subset E$. Prove que $A \cap B = \emptyset$ se, e somente se, $A \subset B^c$. Prove também que $A \cup B = E$ se, e somente se, $A^c \subset B$.

19. Prove que $A - B = A \cap B^c$, em que A e B são conjuntos quaisquer de um universo E.

20. Dados $A, B \subset E$, prove que $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^c = \emptyset$.

21. Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset$.

22. Prove cada igualdade a seguir:

    (a) $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$;
    (b) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$;
    (c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
    (d) $A \subset M$, $B \subset N \Rightarrow A \times B \subset M \times N$;
    (e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

23. Demonstrar as fórmulas de distributividade do produto cartesiano em relação à diferença:

    (a) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$;
    (b) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.

24. Sejam A e B conjuntos. Mostre que $A \times B = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

25. Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

    (a) Monte o conjunto $A \times B$ e represente-o geometricamente.
    (b) **Def.** Dizemos que R é uma *relação binária* ou simplesmente *relação* de A em B se $R \subset A \times B$. De acordo com esta definição, destaque na representação feita em (a) a relação R dada por
    $$R = \{(a, b) \in A \times B : a < b\}.$$

26. Dados $A = \{-1, 1, 2, 4\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, represente graficamente a relação R dada por
    $$R = \{(x, y) \in A \times B \ : x \leq y\}$$
    no plano cartesiano.

27. Sejam A e B conjuntos de um universo fundamental E. Prove que $(A \cup B) - B = A$ se, e somente se, A e B forem disjuntos.

28. Seja E o espaço fundamental e $A \subset E$. Prove que
    $$A \Delta E = A^{\complement} \ \text{ e } \ A \Delta A^{\complement} = E.$$

29. Prove a propriedade da distributividade da intersecção em relação à diferença simétrica:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$

Vale uma propriedade equivalente a esta para a união? Justifique.

30. Prove que, para quaisquer conjuntos A e B, vale $A \Delta B = B \Delta A$.

31. Sejam A e B subconjuntos de um universo E. Prove que se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$, então $B = A^c$ e $A = B^c$.

32. Demonstrar:

(a) $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$

(b) $A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$

33. Demonstrar que para toda família $\{A_i : i \in I\}$ de um espaço fundamental E tem-se as leis de De Morgan:

(a) $\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^{\complement} = \bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}$;

(b) $\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^{\complement} = \bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}$.

34. Demonstrar que:

(a) $\forall i \in I,\ A_i \subset B \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subset B$;

(b) $\forall i \in I,\ A_i \subset B_i \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subset \bigcap_{i \in I} B_i$.

35. Sejam L e M conjuntos não vazios e considere, respectivamente, as famílias $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ e $(B_\mu)_{\mu \in M}$. Prove que

$$\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup \left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu \right) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Em seguida, escreva a igualdade acima considerando $L = \{1, 2\}$ e $M = \{1, 2, 3\}$.

36. (OSEC) Numa escola de 360 alunos, onde as únicas matérias dadas são matemática e português, 240 alunos estudam matemática e 180 alunos estudam português. O número de alunos que estudam matemática e português é:
a) 120. b) 60. c) 90. d) 180. e) N.d.a.

37. (PUC-CAMPINAS) Numa indústria, 120 operários trabalham de manhã, 130 trabalham à tarde, 80 trabalham à noite; 60 trabalham de manhã e à tarde, 50 trabalham de manhã e a noite, 40 trabalham à tarde e à noite e 20 trabalham nos três períodos. Assim:
a) 150 operários trabalham em 2 períodos
b) há 500 operários na indústria.
c) 300 operários não trabalham à tarde.
d) há 30 operários que trabalham só de manhã.
e) N. d.a.

38. Uma prova na qual constam dois problemas foi dada a 180 alunos. O resultado obtido foi: 119 alunos acertaram o 1° problema, 64 acertaram o 2° problema e 45 acertaram os dois. Quantos alunos erraram os dois problemas?

39. Uma empresa, fabricante de achocolatados, pretende lançar um novo produto no mercado. Para isso, encomendou uma pesquisa sobre as preferências dos consumidores entre duas embalagens A e B. Foram consultadas 402 pessoas e o resultado foi precisamente o seguinte:

    - 150 pessoas gostaram somente da embalagem A;
    - 240 pessoas gostaram da embalagem B;
    - 60 pessoas gostaram das duas embalagens.

    Quantas pessoas não gostaram de nenhuma das duas embalagens?

40. Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, considere as afirmativas:

    I. $\{0\} \in P$

    II. $\{0\} \subset P$

    III. $\emptyset \in P$

    Com relação a estas afirmativas, conclui-se que:
    a) Todas são verdadeiras.
    b) Apenas I é verdadeira.
    c) Apenas II é verdadeira.
    d) Apenas III é verdadeira.
    e) Todas são falsas.