Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II - Turmas T3, T6 e T7
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 13 de Exercícios
(Séries numéricas)

1. Analisar a convergência das séries a seguir e determinar a sua soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$ [Sugestão: $2n-1 = 3n-(n+1)$]

2. **(Sel. Mestrado UFSM 2011/1)**

(a) Considere duas sequências de números reais não-negativos (a_n) e (b_n) tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ para algum $c > 0$. Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

(b) Use o resultado anterior para estudar a convergência das séries $\displaystyle\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2}$ e $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n-1}$.

3. Decida se cada série a seguir é convergente ou divergente, usando um teste adequado.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{2^n}}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{1+n^2}$ (ℓ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

4. Para todo $p \in \mathbb{N}$ fixado, prove que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p)}$$

converge.

5. Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

6. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge. Sugestão: utilize o segundo limite notável: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

7. Em cada item, verifique se a série dada converge e, em caso afirmativo, se absolutamente ou condicionalmente:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^n n^3}{e^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n-1}{10n+2}$