Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II - Turmas T3, T6 e T7
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 de Exercícios
(integrais da forma $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ e $R(x^{\frac{1}{m}})$; integrais impróprias)

1. Calcule cada integral indefinida abaixo.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$ (b) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\sin x}$ (d) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{1+\cos x}$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\operatorname{sen} x}$ (f) $\displaystyle\int \frac{2\tan x}{2+3\cos x}dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[7]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8}+\sqrt[14]{x^{15}}}dx$

(i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (j) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$

(k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^3+2x^2-3x}$ (ℓ) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$

(m) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{\frac{4}{3}}}$ (n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}}-(x-2)^{\frac{3}{4}}}$

2. Mostre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{x+1} = \frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$.

3. Mostre que
$$\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} = 8+\frac{3}{2}\pi\sqrt{3}.$$

4. Leia atentamente a tira abaixo, adaptada de histórias em quadrinhos da DC Comics.

Mostre que você também tem superpoderes e junte-se à Liga da Justiça ajudando o Superman a resolver a integral indefinida dada. Uma Superforça para você é mudar de variável, por exemplo, tente escrevendo $x+1=t^2$.

5. Calcule cada integral definida a seguir, se existir

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ (e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln x\, dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{4x}dx$

(g) $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ (h) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}$ (i) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

6. Seja p uma constante positiva. Determine o valor de p para que a integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$$

seja convergente.

7. Calcule a integral $\int_0^1 \ln x\,dx$, se esta integral existir.

8. **A Função Gamma.** Definimos, para cada[1] $n \in \mathbb{N}$, a função

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}dx$$

Tal função é chamada de *função Gamma*.

(a) Usando integração por partes e a regra de L'Hospital, mostre que

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1).$$

(b) Mostre, em particular, que $\Gamma(1) = 1$. Conclua que $\Gamma(n) = (n-1)!$, onde "!" expressa o *fatorial* de n.

9. Calcule a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$, se existir.

[1]De fato, esta função também fica bem definida se n for racional ou inteiro negativo. Assim, a função Gamma generaliza a noção de fatorial de um número inteiro para um número racional e para um número negativo!