Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo II - Turmas T3, T6 e T7
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 12 de Exercícios
(Sequências numéricas)

1. Prove que cada limite a seguir pela definição.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-5n} = -\dfrac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Determine se a sequência (x_n) dada converge ou diverge. Se convergir, determine o seu limite.

   (a) $x_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$ (b) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ (c) $x_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$

   (d) $x_n = \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$ (e) $x_n = \dfrac{n^2}{e^n}$ (f) $x_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

   (g) $x_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (h) $x_n = n \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}$ (i) $x_n = \arctan 2n$

3. Prove o seguinte Teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.*

4. Utilize o Teorema do exercício anterior para provar que $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$.

5. Prove que se (x_n) for uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então toda subsequência de (x_n) tem o mesmo limite a.

6. Seja a sequência (x_n) definida recursivamente por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{x_n}$.

   (a) Mostre que x_n assim definida é crescente e limitada superiormente por 3. Conclua que é, portanto, convergente.

   (b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

7. Prove que a sequência

$$1,\ \sqrt{1+\sqrt{1}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$$

   converge e que seu limite é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8. Calcule o limite da sequência

$$(x_n) = (\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \ldots)$$

9. Uma sequência (x_n) é definida recursivamente, pondo: $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$.

   (a) Prove que (x_n) é crescente e limitada superiormente por 3. Conclua que existe o limite de tal sequência.

   (b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.