Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Cálculo 2 - Turmas T3, T6 e T7
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios

1. Apenas pelo esboço gráfico, determine as seguintes integrais definidas:

   (a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (b) $\int_0^2 (x-1)dx$ (c) $\int_1^2 (x+2)dx$ (d) $\int_0^3 |x-2|dx$

2. Calcule $\int_0^1 x\,dx$ diretamente da definição de integral, assumindo que esta integral exista.

3. Idem para $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ dada por
$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{se } \ 0\le x\le 1 \\ 2, & \text{se } \ 1<x\le 2 \end{cases}.$$

4. Seja c um ponto do intervalo $[a,b]$ e α um número real. Mostre que a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\begin{cases} \alpha, & \text{se } \ x=c \\ 0, & \text{se } \ x\neq c \end{cases}$$
é integrável, e $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

5. Generalize o exercício anterior para o caso de um número finito de pontos $c_1,c_2,...,c_n$ no intervalo $[a,b]$.

6. Dê um exemplo de uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que não seja integrável, mas seja *módulo-integrável* (i.e., $|f|$ é integrável).

7. Justifique por que $\int_0^1 x\,dx \ge \int_0^1 x^2dx$ e por que $\int_1^2 x\,dx\le \int_1^2 x^2dx$.

8. Suponha que f e g sejam integráveis, com $\int_1^9 f=-1$, $\int_7^9 f=5$ e $\int_7^9 g=4$. Determine:

   (a) $\int_1^9 -2\cdot f$ (b) $\int_7^9 f+g$ (c) $\int_7^9 3f-3g$ (d) $\int_9^1 f$ (e) $\int_1^7 f$

9. Calcule $\int_0^3 (x^3-6x)dx$, usando uma partição regular.

10. Calcule $\int_{-2}^1 x^4dx$, usando uma partição regular.

11. Se a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável em $[a,b]$, definimos o *valor médio* VM de f no domínio $[a,b]$ por
$$VM=\frac{\int_a^b f}{b-a}.$$
Encontre o valor médio para $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2$.

12. Se f é integrável e m e M são tais que $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$ (i.e., f é limitada em $[a,b]$), mostre que
$$m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a).$$

13. Se f é integrável (e então limitada) em $[a,b]$, mostre que
$$\left|\int_a^b f\right|\le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

14. Use a fórmula

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + ... + \sin mh = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

para determinar a área sob a curva $y = \sin x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:

(a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.

(b) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f;P)$.

15. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists\, K > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para quaisquer $x, y \in [0,1]$. Mostre que

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| < \frac{K}{2n}.$$