Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Física e Meteorologia
Gabarito da primeira prova de Cálculo II **Data:** 05/05/2010.
Prof. Maurício Zahn

Questão 01. Note que o esboço gráfico da f é dado por

(a) Note pelo esboço gráfico da f que

$$\int_0^2 f = A_1 + A_2 = \frac{(2+1).1}{2} + \frac{1.1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

(b) Note que $\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f$. Assim, vamos calcular primeiramente $\int_0^1 f$.
Seja P_n a partição regular que divide o intervalo $[0,1]$ em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ com comprimento $t_i - t_{i-1} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. Como em $[0,1]$ f é crescente, temos

$$M_i = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i) = t_i + 1$$

e

$$m_i = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_{i-1}) = t_{i-1} = 1$$

Assim, temos

$$S(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i.(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_i+1)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1.$$

Como em $[0,1]$ temos

$$t_0 = 0,\ \ t_1 = \frac{1}{n},\ \ t_2 = \frac{2}{n},\ ...,\ t_j = \frac{j}{n},\ ...,\ t_n = \frac{n}{n} = 1,$$

segue que

$S(f;P_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n} + \frac{1}{n}.n = \frac{1}{n^2}\frac{(1+n)n}{2} + 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} + 1 \to \frac{3}{2}$ quando $n \to \infty$.

Logo, $S(f;P_n) \to \frac{3}{2}$ quando $n \to \infty$. Em particular, tomando o ínfimo das somas superiores, temos

$$\overline{\int_0^1} f = \inf S(f;P_n) = \frac{3}{2}.$$

Analogamente,

$s(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i.(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(t_{i-1}+1)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_{i-1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n-1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{n^2}\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + 1 =$

$$= 1.\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2} + 1 \to \frac{3}{2} \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim, conclui-se que

$$\underline{\int_0^1} f = \sup s(f;P_n) = \frac{3}{2}.$$

Portanto, $\int_0^1 f = \frac{3}{2}$.

Analogamente mostramos que $\int_1^2 f = \frac{1}{2}$. Assim, concluímos que

$$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

(c) Pelo TFC, temos

$\int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^2 f = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 (2-x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)_{x=0}^{x=1} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)_{x=1}^{x=2} =$

$= \frac{1}{2} + 1 - 0 + 4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2.$

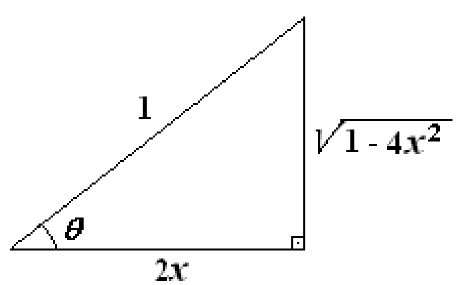
Questão 02.

(a) Separando a integral numa soma temos
$\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2}}dx - \int \frac{dx}{\sec(1-2x)} + \int \ln x dx = 2\int x.x^{-\frac{2}{3}}dx - \int \cos(1-2x)dx + \int \ln x dx.$

Vamos calcular separadamente cada integral:
$\int x.x^{-\frac{2}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c;$
$\int \cos(1-2x)dx = \int \cos v.(-\frac{dv}{2}) = -\frac{1}{2}\int \cos v dv =$
$= -\frac{1}{2}\sin v + c = -\frac{1}{2}\sin(1-2x) + c;$
$\int \ln x dx:$

Integrando por partes esta última integral temos $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ e $dv = dx \Rightarrow x = v$. Portanto:
$\int \ln x dx = \int u.dv = u.v - \int v.du = x.\ln x - \int x.\frac{dx}{x} = x\ln x - x + c.$
Portanto, a resposta final será
$2.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\sin(1-2x) + x\ln x - x + c = \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}\sin(1-2x) + x\ln x - x + c.$

(b) Fazendo uma substituição trigonométrica, c.f. figura, temos



Assim,
$$\sin\theta = \sqrt{1-4x^2};$$
$$\cos\theta = \frac{2x}{1} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\cos\theta \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}\sin\theta.d\theta$$
Portanto,
$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sin\theta(-\frac{1}{2}\sin\theta)d\theta}{(\frac{1}{2}\cos\theta)^2} = -2\int \tan^2\theta.d\theta = -2\int(\sec^2\theta - 1)d\theta =$
$-2\tan\theta + \theta + c =$
$$= -2.\frac{1-4x^2}{4x^2} + \arccos(2x) + c = -\frac{1-4x^2}{2x^2} + \arccos(2x) + c$$

(c) Note que, sendo $v = x^2 + 4x + 3$, temos $dv = (2x+4)dx$. Assim,

$\int \frac{(2x+7)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \int \frac{(2x+4)+3}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = \int (x^2+4x+3)^{-\frac{1}{2}}(2x+4)dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} =$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+3} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}}.$$

Vamos resolver a parte integral que acabamos de completar um quadrado perfeito. Para isto, iremos considerar um triângulo retângulo ABC, reto em B, com $AB = 1$, $AC = x+2$ e $BC = \sqrt{(x+2)^2-1} = \sqrt{x^2+4x+3}$. Assim, iremos fazer a substituição trigonométrica $\tan\theta = \sqrt{x^2+4x+3}$, $\cos\theta = \frac{1}{x+2}$, donde segue que $x = \sec\theta - 2$ e daí tiramos $dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$. Portanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \int \frac{\sec\theta\tan\theta.d\theta}{\tan\theta} = \int \sec\theta.d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c =$$
$$= \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}| + c$$

e, com isto, obtemos

$$\int \frac{(2x+7)dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\sqrt{x^2+4x+3} + 3.\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}| + c$$

(d) Como, decompondo em frações parciais, obtemos

$$\frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x^2-1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{2\,(x+1)} - \frac{1}{2\,(x+3)},$$

concluímos que

$$\int \frac{3x^2+11x+2}{(x+3)(x^2-1)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{2\,(x+1)}dx - \int \frac{1}{2\,(x+3)}dx =$$
$$= 2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x+3| + c.$$

(e) Decompondo em frações parciais adequadamente obtemos

$$\frac{2x^3-4}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{2x-1}{x^2+1} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Portanto,

$\int \frac{2x^3-4}{(x^2+1)(x+1)^2}$dx=$\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln|x^2+1| - \frac{3(x+1)^{-1}}{-1} + c$

$$= \ln|x^2+1| + \frac{3}{x+1} + c.$$

(f) Iremos resolver este exercício usando integração por partes. Assim

$\int \frac{2x}{(x^2-4)^2}\ln(x+1)dx = \int u.dv = u.v - \int v.du,$
onde

$$u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \frac{dx}{x+1}$$

$$dv = \frac{2xdx}{(x^2-4)^2} \Rightarrow v = \int (x^2-4)^{-2}2x.dx = \frac{(x^2-4)^{-1}}{-1} = \frac{1}{x^2-4}$$

e portanto,

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)^2}\ln(x+1)dx = \frac{1}{x^2-4}\ln(x+1) - \int \frac{1}{x^2-4}.\frac{dx}{x+1} =$$
$$= \frac{1}{x^2-4}\ln(x+1) - \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)(x+1)}$$

Decompondo em frações parciais, temos

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{1}{12\,(x-2)} - \frac{1}{3\,(x+1)} + \frac{1}{4\,(x+2)}$$

e portanto,

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)(x+1)} = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} =$$
$$= \frac{1}{12}\ln(x-2) - \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{4}\ln(x+2) + c$$

e daí

$$\int \frac{2x}{(x^2-4)^2}\ln(x+1)dx =$$
$$= \frac{1}{x^2-4}\ln(x+1) - \frac{1}{12}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x+2) + c$$

Questão 03. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, com f' integrável. Seja também $m = \frac{a+b}{2}$. Vamos calcular

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx.$$

Assim,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx =$$
$$= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{2}{b-a}\int_a^b (x-m)f'(x)dx. \qquad \text{(I)}$$

Integrando a segunda integral por partes, tomando $u = x-m$ e $dv = f'(x)dx$, obtemos $du = dx$ e $v = f(x)$. Assim, obtemos

$$\int_a^b (x-m)f'(x)dx = [(x-m)f(x)]_a^b - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= (b-m)f(b) - (a-m)f(a) - \int_a^b f(x)dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}f(b) - \frac{a-b}{2}f(a) - \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(II)}$$

Levando (II) em (I) obtemos

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x) + (x-m)f'(x)]dx =$$

$$= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{2}{b-a}\left[\frac{b-a}{2}f(b) - \frac{a-b}{2}f(a) - \int_a^b f(x)dx\right] =$$

$$= f(b) + f(a)$$

c.q.d.