Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Terceira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 27/07/2018

Questão 01. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função. Prove que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to 0^+} f(\frac{1}{x}) = L.$$

Questão 02. Prove que a função $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1-x}$ é contínua em todo o seu domínio.

Questão 03. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que

$$|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}.$$

Prove que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

Questão 04. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Questão 05. Responda cada um dos itens a seguir (eles são independentes)

(a) Prove que se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função de Lipschitz, então f é uniformemente contínua.

(b) Verifique que a recíproca do item (a) em geral é falsa, considerando a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$.

(c) Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são limitadas e de Lipschitz, mostre que $f \cdot g$ também é de Lipschitz.

Questão 06. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ é uniformemente contínua? Justifique.

Questão 07. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em A.

(a) Prove que se f for uniformemente contínua, então a sequência das imagens $(f(x_n))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre através de um exemplo, que se f for contínua, mas não uniforme, o resultado do item (a) pode ser falso (ou seja, encontre uma f apenas contínua, mas não uniforme, e uma a sequência de Cauchy (x_n) em A, tais que a sequência das imagens $(f(x_n))_n$ não é de Cauchy em $\mathbb{R}$).

Questão	01	02	03	04	05	06	07
Valor	1,0	1,0	1,5	1,5	3,0	1,0	2,0