Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Terceira Prova de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 23/07/2018

Questão 01. Sejam A um anel, S um subanel de A e I um ideal de A.

(a) Prove que $S + I$ é um subanel de A. Seria um ideal? Justifique.

(b) Prove que $I \cap S$ é um ideal de S.

(c) Prove que $(I + S)/I \simeq S/I \cap S$.

Questão 02. Seja A um anel. Um elemento $a \in A$ é *idempotente* se $a^2 = a$. Um elemento $k \in A$ é um *quadrado nilpotente* se $k^2 = 0$. Um elemento $v \in A$ é *involutório* se $v^2 = 1$. Se $a \in A$ for um elemento idempotente de A, mostre que:

(a) $1 - a$ é idempotente.

(b) para todo $x \in A$, $ax(1 - a)$ é um quadrado nilpotente.

(c) para todo $x \in A$, $a + ax(1 - a)$ é idempotente.

(d) $2a - 1$ é involutório.

Questão 03. Sejam $f : A \to A$ um homomorfismo de um anel A em si mesmo e S o conjunto dos elementos que são fixos por f, ou seja,

$$S = \{a \in A \,:\, f(a) = a\}.$$

Mostre que S é um subanel de A.

Questão 04. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis.

(a) Mostre que se I é um ideal de A, então $f(I)$ é um ideal de $f(A)$.

(b) É $f(I)$ um ideal de B? Justifique.

(c) Se f é sobrejetivo e J é um ideal do anel B, mostre que $f^{-1}(J)$ é um ideal do anel A que contém $\ker f$.

Questão 05. Se I é um ideal de um anel A, prove que o anel $M_n(A/I)$ é isomorfo a $M_n(A)/M_n(I)$, ou seja,

$$M_n(A/I) \simeq \frac{M_n(A)}{M_n(I)}.$$

Obs.: $M_n(A/I)$ é o anel das matrizes $n \times n$ com entradas sendo elementos do anel quociente A/I, etc.