Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 12 - Anéis de polinômios

1. Seja B um subanel de A e I ideal de A. Seja $C \subset A[X]$ o conjunto

$$C = \{a_0 + ... + a_n X^n \in A[X] : a_0 \in B, a_i \in I, \forall i > 0\}.$$

Mostre que C é um subanel de $A[X]$.

2. Mostre que a aplicação $f : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[X]$, com $m > 1$ dada por

$$f(a_0 + a_1 X + ... + a_k X^k) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 X + ... + \overline{a}_k X^k$$

é um homomorfismo de anéis. Esta função é injetiva? justifique.

3. Um elemento a de um anel A é dito *nilpotente* se $a^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Se a é um elemento nilpotente de um anel com unidade A, mostre que $1 + a$ é inversível. Dica: $(1 + a)^{-1} = 1 - a + a^2 + ... + (-1)^{n-1} a^{n-1}$, onde $a^n = 0$.

   (b) Seja A um anel comutativo com unidade. Verifique que o polinômio $f(x) = 1 + ax$ é inversível em $A[x]$ se, e somente se, o elemento a é nilpotente em A.

4. Seja A um anel comutativo com unidade e defina a função $d : A[x] \to A[x]$, chamada de *função derivada* , como segue: se $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \in A[x]$, então

$$d(f(x)) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1}.$$

Para quaisquer $f(x), g(x) \in A[x]$ e $\forall a \in A$, estabeleça que

   (a) $d(f(x) + g(x)) = d(f(x)) + d(g(x))$,

   (b) $d(af(x)) = ad(f(x))$,

   (c) $d(f(x)g(x)) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x))$.

5. Suponha A um anel comutativo com unidade e seja $a \in A$ uma raiz não-nula de $f(x) \in A[x]$. Dizemos que a é uma *raiz múltipla* de $f(x)$ se

$$f(x) = (x - a)^n g(x) \quad (n > 1),$$

onde $g(x) \in A[x]$ é um polinômio tal que $g(a) \neq 0$. Prove que um elemento $a \in A$ é uma raiz múltipla de $f(x)$ se, e somente se, a é uma raiz de $f(x)$ e $d(f(x))$.