Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 11 - Homomorfismos de anéis e o Teorema dos isomorfismos

1. Mostre que $f : \mathbb{C} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ dada por
$$f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ \forall a, b \in \mathbb{R}$$
é um monomorfismo de anéis.

2. Sejam os anéis $A = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ e $B = M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.
Mostre que $f : A \to B$ dada por $f(a + b\sqrt{-2}) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a \end{pmatrix}$ é um homomorfismo.
f é um isomorfismo? Justifique.

3. Seja A um anel com unidade. Para cada elemento inversível $a \in A$, seja $f_a : A \to A$ a aplicação dada pela lei $f_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que f_a é um isomorfismo e dê uma fórmula para $f_a \circ f_b$.

4. Dado o homomorfismo $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ definido por $f(m) = \overline{m}$. Construa o núcleo de f.

5. Sejam os anéis $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ com suas operações usuais e $\pi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a projeção canônica dada por
$$\pi(x, y) = x.$$
   (a) Mostre que $I = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x = 0\}$ é um ideal de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (b) Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/I$ e $\mathbb{Z}$ são isomorfos.

6. Se $f : A \to B$ é um homomorfismo entre os anéis A e B, mostre que $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, para cada elemento $a \in A$ invertível.

7. Prove o seguinte teorema: Seja I um ideal de um anel A. Então, a aplicação $\mathrm{nat}_I : A \to A/I$ dada por
$$\mathrm{nat}_I(a) = a + I$$
é um homomorfismo de A no anel quociente A/I e o núcleo $\ker(\mathrm{nat})_I = I$.

8. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis e $I \subset A$ um ideal do anel A. Mostre que $f(I)$ é um ideal de B.

9. *Sejam A e B anéis, $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de anéis e J um ideal de B. Mostre que
$$I = \{a \in A : \varphi(a) \in J\}$$
é um ideal de A.

10. Seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis e I um ideal de A. Defina a função $h : A/I \to B/f(I)$ por

$$h(a + I) = f(a) + f(I).$$

Mostre que h é um isomorfismo entre os anéis A/I e $B/f(I)$.

11. Seja $F : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(f) = f(\frac{1}{2}), \forall f \in \mathcal{C}[0, 1].$$

Prove que F é um homomorfismo e calcule o seu núcleo.

12. Sejam A um anel e I, J ideais de A. Prove que $I/(I \cap J) \simeq (I + J)/J$.

13. Mostre que $\dfrac{M_{2,2}(\mathbb{Z})}{M_{2,2}(n\mathbb{Z})} \simeq M_{2,2}(\mathbb{Z}_n)$.

14. Sejam $f : A \to B$ um epimorfismo entre anéis e I, J ideais do anel B.

    (a) Prove que $f^{-1}(I \cap J)$ é um ideal do anel A.

    (b) Prove que $\dfrac{A}{f^{-1}(I \cap J)} \simeq \dfrac{B}{I \cap J}$.