Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 12 de Exercícios
(Continuidade uniforme)

1. Mostre que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ é uniformemente contínua.
2. Prove que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ é uniformemente contínua.
3. Mostre que a função $f(x)=\frac{1}{x^2}$ é uniformemente contínua em $[1,+\infty)$, mas não é uniformemente contínua em $(0,+\infty)$.
4. Se $f,g:I\to\mathbb{R}$ forem uniformemente contínuas, mostre que $f+g$ também é uniformemente contínua.
5. Mostre que $f(x)=x^2$ definida em $|x|\leq 17$ é lipschitziana, mas $f(x)=x^2$ definida em $\mathbb{R}$ não é.
6. Mostre que a função $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ dada por $f(x)=\sqrt[n]{x}$ não é lipschitziana num intervalo da forma $[0,a]$, $a>0$, embora seja uniformemente contínua aí.
7. Prove que se f e g são uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$, então $g\circ f$ também é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.
8. Seja $f:I\to\mathbb{R}$ uma função. Prove que são equivalentes as seguintes afirmações:
   (i) f é uniformemente contínua;
   (ii) se $x_n,y_n\in I$ são tais que $x_n-y_n\to 0$, então $f(x_n)-f(y_n)\to 0$.
9. Seja $f:I\to\mathbb{R}$. Prove que são equivalentes:
   (i) f não é uniformemente contínua;
   (ii) $\exists\,\varepsilon>0$, $\exists\,x_n,y_n\in I$ tais que $|x_n-y_n|\to 0$ e $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
10. Mostre que a função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}x^2$ não é uniformemente contínua. (Sugestão: use o exercício 9)
11. **Def.** Dizemos que uma função $f:I\to\mathbb{R}$ é uma *função de Hölder* se $\exists\,M>0$ e $\exists\,\alpha\in(0,1]$ tais que
    $$|f(x_1)-f(x_2)|\leq M|x_1-x_2|^{\alpha}\,,\forall x_1,x_2\in I.$$
    Note que no caso particular $\alpha=1$, f é de Lipschitz .
    (a) Mostre que se $f:I\to\mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.
    (b) Mostre que se a condição de Hölder permitíssemos $\alpha>1$, seguiria que $f'(x)=0$, $\forall x$ no interior de I e, portanto, teríamos f constante (esta é a razão para impor a condição $\alpha\leq 1$ na definição).
    (c) Mostre que a função $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$, satisfaz a condição de Hölder com $M=1$ e $\alpha=\frac{1}{2}$ sendo, portanto, uniformemente contínua (Sugestão: basta uma manipulação algébrica simples).