Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 11 de Exercícios
(Continuidade)

1. Prove que a função $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{1-x}$ é contínua em todo o seu domínio.

2. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$ é contínua. (Sugestão: $|a^x - a^b| = a^b|a^{x-b} - 1|$)

3. Mostre que a função real definida por
$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$
é contínua em $x = 0$.

4. Mostre que toda função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é contínua.

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2003/2)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se x é racional e $f(x) = 0$ se x é irracional **não** é contínua em nenhum ponto.

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que
$$|f(x_n) - x_n| < \frac{1}{n}.$$
Prove que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. (**Sugestão:** Use o Teorema de Bolzano-Weierstrass).

7. **(Sel. Mestr. UFRGS 2011/2)**
   (a) Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I da reta diz-se Lipschitz se existe uma constante $K > 0$ tal que
   $$x, y \in I \Rightarrow |f(x) - f(y)| < K|x - y|.$$
   Prove que se f é Lipschitz, então f é contínua.
   (b) Prove que se duas funções f e g são Lipschitz e definidas em um mesmo intervalo I, então $f + g$ é Lipschitz.
   (c) Prove que uma função Lipschitz $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I limitado da reta, é uma função limitada.
   (d) Prove que se f e g são duas funções Lipschitz definidas em um mesmo intervalo limitado I, então o produto $f \cdot g$ é Lipschitz.

8. **(Sel. Mestr. UFRGS 2005/2)** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não decrescente.

   (a) Prove que
   $$f(b) = \sup_{x \in (a,b)} f(x). \tag{1}$$

   (b) Mostre que a igualdade (1) pode ser falsa se não requerermos que f seja contínua.

9. Dada a função real de variável real $f(x) = 4+3x-x^2$. Use o Teorema do Valor intermediário para mostrar que existe um $c \in [2, 5]$ tal que $f(c) = 1$. Determine também o valor de $f(c)$.

10. Use o Teorema do valor intermediário para mostrar que $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 3x - 1$ possui uma raiz real no intervalo $[1, 2]$. Idem para o intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

11. Mostre que o Teorema do valor intermediário garante que a equação $x^3 + x + 3 = 0$ tenha uma raiz entre -2 e -1.

12. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in [0, 1]$, temos
    $$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$
    Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ côncava e contínua, com $f(a) < f(b)$. Mostre que para cada $d \in (f(a), f(b))$, existe um único $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)**

    (a) Sejam $f, g :: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $g(a) < f(a)$ e $f(b) < g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

    (b) Sendo $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, através do item (a) mostre que a função $h : D \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x - \cot(x)$ possui infinitas raízes.

14. **(Sel. Mestr. UFSM 2015/1)**

    (a) Mostre que a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por
    $$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x & \text{se} \quad x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ |x| & \text{se} \quad x \in (-\frac{1}{2}, 0] \\ x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \in (0, 1], \end{cases}$$
    é contínua.

    (b) A função dada no item anterior assume valor máximo no domínio de definição? Justifique.

15. **(Sel. Mestr. UFSM 2011/1)** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que se anula nos racionais. Prove que f é identicamente nula.

16. Uma função f é dita ser *simetricamente contínua* em um ponto x se
    $$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0.$$
    Mostre que se f é contínua em um ponto, então é simetricamente contínua no ponto, mas que a recíproca não é verdadeira.