Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios
(Limites laterais, infinitos e no infinito)

1. Seja $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{1+a^{\frac{1}{x}}}$, onde $a>1$. Prove que $\lim_{x\to a^+} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)=1$.

2. Sejam $f:X\to\mathbb{R}$ monótona e $a\in X'_+$. Se existir uma sequência $(x_n)\subset X$ com $x_n>a$, $x_n\to a$ e $f(x_n)\to L$, mostre que $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$

3. Defina $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$. Em seguida, prove que
$$\lim_{x\to a^+}\frac{1}{x-a}=+\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-}\frac{1}{x-a}=-\infty.$$

4. Prove que $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ e que $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$.

5. Prove que $\lim_{x\to+\infty}\tanh x=1$

6. Prove que $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+1}{2x+5}=\frac{3}{2}$.

7. Prove que $\lim_{x\to-\infty}(1+a^x)=\begin{cases}1 & \text{se} \quad a>1\\ +\infty & \text{se} \ 0<a<1\end{cases}$.

8. Prove que se $\lim_{x\to a} f(x)=L$ e $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, então
$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty.$$

9. Suponha que f e g possuem limites em $\mathbb{R}$ quando $x\to+\infty$ e que $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in(a,+\infty)$. Prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x)\le\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

10. Seja $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$. Usando apenas a definição de limite no infinito, prove que são equivalentes:

    (i) $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$,

    (ii) para toda sequência (x_n) em $(a,+\infty)$, $x_n\to+\infty \Longrightarrow f(x_n)\to L$.

11. Seja $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função. Prove que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ se, e somente se,
$$\lim_{x\to 0^+} f(\frac{1}{x})=L.$$

12. Mostre que se $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=L$, onde $L\in\mathbb{R}$, então $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

13. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = L \in \mathbb{R}.$$

Prove que $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$ e que $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } L > 0 \\ +\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$.

14. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty.$$

Prove que $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$ e que $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$

15. **(Sel. Mestr. UFRGS 2011/2)**
(a) Seja $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Defina precisamente o significado de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.
(b) Prove que se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ e $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = B$, então $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = A + B$.