Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 25/06/2018 A.D.

Questão 01. Considere a sequência (x_n) definida recursivamente por

$$x_1 = \frac{1}{2}, \;\; x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2}.$$

Prove que (x_n) é convergente e calcule o seu limite.

Questão 02. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

(a) Prove que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda < 1$ e $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x_{n+1} \leq \lambda x_n$, $\forall n \geq n_0$. Conclua que $x_n \to 0$.

(b) Aplique o resultado acima para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

(c) Justifique que se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ nada pode-se concluir, dando três exemplos de sequências satisfazendo $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, mas tais que em um exemplo se tenha $x_n \to 1$, em outro $x_n \to 0$ e em outro $x_n \to +\infty$.

Questão 03. Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ forem duas sequências de Cauchy, prove que as sequências $(x_n + y_n)_n$ e $(x_n \cdot y_n)_n$ também são sequências de Cauchy.

Questão 04. Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$. Prove que X é um aberto de M se, e somente se, $X \cap \partial X$ for um conjunto vazio.

Questão 05. Sejam $K_1, K_2, ..., K_n$ compactos de $\mathbb{R}$. Mostre que $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n$ também é um compacto de $\mathbb{R}$. Mostre através de um exemplo que esse resultado é falso se considerarmos uma família infinita de compactos.

Questão 06. Determine $\text{int}(\mathbb{Q})$, $\partial\mathbb{Q}$ e $\overline{\mathbb{Q}}$ em relação ao conjunto (justifique suas respostas):

(a) dos números reais $\mathbb{R}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

(b) dos números racionais $\mathbb{Q}$. Neste caso, $\mathbb{Q}$ seria fechado? Justifique.

Questão 07. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x}$.

(a) Prove pela definição de limite de função que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(b) Enuncie e prove o Teorema do Sanduíche. Em seguida, use esse Teorema para mostrar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) Existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$? Justifique.

Questão	01	02	03	04	05	06	07
Valor	1,5	2,5	1,5	1,0	1,0	2,0	2,5