Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Segunda prova de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 25/06/2018.

Questão 01. Considere no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos as raízes[1] da equação $z^8 = 1$.

(a) Mostre que o conjunto G formado pelas raízes da equação acima, com o produto usual em $\mathbb{C}$ é um grupo.

(b) Verifique se o grupo G é cíclico.

(c) Faça uma representação geométrica no plano de Argand-Gauss das raízes oitavas de 1. Em seguida, na representação feita, destaque um subconjunto H de G que possua o vértice correspondente ao afixo $z = 1$ e outros três vértices de forma a obter um quadrado. Mostre que $H < G$.

(d) Verifique se $H \lhd G$.

(e) Existe algum subgrupo de G de ordem 5? Justifique.

(f) Justifique que existe um subgrupo K de G, de ordem 2. Determine-o. Afirmamos que o mesmo é cíclico. Por quê? Afirmamos que $K \lhd G$. Por quê?

(g) Determine as classes laterais à esquerda de K e o conjunto das classes G/K.

(h) Considere o grupo aditivo $(\mathbb{Z}_8, +)$. Determine as classes laterais à esquerda de $J = \langle \overline{4} \rangle$ no referido grupo e o conjunto quociente $\mathbb{Z}_8/J$.

(i) Mostre que $J \lhd \mathbb{Z}_8$.

(j) Mostre que $\mathbb{Z}_8/J \simeq G/K$ de duas formas:

 (i) sem usar o Teorema dos isomorfismos;

 (ii) usando o Teorema dos isomorfismos.

Questão 02. Seja a um elemento fixo em um grupo multiplicativo G. Prove que $f : G \to G$ dada por $f(x) = axa^{-1}$ é um isomorfismo.

Questão 03. Sejam $\varphi : G \to H$ um isomorfismo de grupos e $K \lhd H$. Prove que

$$\varphi^{-1}(K) \lhd G \quad \text{e} \quad \frac{G}{\varphi^{-1}(K)} \simeq \frac{H}{K}.$$

[1]Para facilitar a sua vida, as raízes oitavas da unidade são: 1, $e^{\frac{\pi}{4}i}$, $e^{\frac{2\pi}{4}i}$, $e^{\frac{3\pi}{4}i}$, ..., $e^{\frac{7\pi}{4}i}$.