Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 10 - Ideais

1. Verifique se $\{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ é um ideal do anel $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

2. Seja I um ideal de $\mathbb{Z}$. Prove que se $1 \in I$, então $I = \mathbb{Z}$.

3. **Def.** Se A é um anel qualquer, um subconjunto L de A é denominado um *ideal lateral à esquerda* de A se

   (i) L é um subgrupo de A com relação à adição.
   (ii) $\forall a \in A$, $\forall \ell \in L$, temos $a\ell \in L$.

   De maneira análoga definimos *ideal à direita*.
   Note que um *ideal* é ao mesmo tempo, um ideal à esquerda e à direita.
   Com base na definição acima, resolva:

   (a) Para $a \in A$, defina $Aa = \{xa : x \in A\}$. Mostre que Aa é um ideal à esquerda de A.
   (b) Mostre que a intersecção de dois ideias à esquerda de A é um ideal à esquerda de A.

4. Seja I um ideal de um anel A, defina o conjunto $C(I)$ por

$$C(I) = \{x \in A : xa - ax \in I, \forall a \in A\}.$$

   Mostre que $C(I)$ forma um subanel de A.

5. (a) Mostre com um exemplo que se I e J são dois ideais de um anel A, não segue necessariamente que $I \cup J$ seja um ideal de A.
   (b) Se $\{I_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ é uma coleção de ideais do anel A tal que $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$, prove que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ é um ideal de A.

6. Seja A um anel comutativo. Tomando os elementos $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, definimos o subconjunto

$$\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle = \{x_1a_1 + ... + x_na_n : x_1, ..., x_n \in A\}.$$

   (a) Mostre que $\langle a_1, ..., a_n \rangle$ é um ideal do anel A (tal ideal chama-se *ideal gerado pelos elementos* $a_1, a_2, ..., a_n$).
   (b) Descreva $\langle 5 \rangle$ em $\mathbb{Z}$ e $\langle 1, -i \rangle$ em $\mathbb{C}$.

7. Seja I um ideal no anel A e $a \in A$ um elemento fixado. Mostre que o conjunto

$$\langle I, a \rangle = \{i + ra : i \in I \text{ e } r \in A\}$$

   é um ideal de A.