Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 - Anéis e subanéis

1. Consideremos as operações de adição $\star$ e multiplicação Δ em $\mathbb{Q}$ definidas por
$$x \star y = x + y - 3 \ \text{ e } \ x \Delta y = x + y - \frac{xy}{3}$$
Mostre que $(\mathbb{Q}, \star, \Delta)$ é um anel comutativo.

2. Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Em $A \times A$ são definidas as operações
$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd).$$
Prove que $(A \times A, \oplus, \odot)$ é um anel.
Se A for um domínio, $A \times A$ com as operações acima definidas é um domínio? Justifique.

3. Seja E um conjunto não-vazio. Mostre que $A = \mathcal{P}(E)$ é um anel comutativo desde que se definam, para quaisquer $x, y \in A$, as operações
$$x + y = \complement_{x \cup y}(x \cap y) \ \text{ e } \ x \cdot y = x \cap y.$$

4. Seja A um anel com a seguinte propriedade: $x^2 = x$, $\forall x \in A$. Mostre que $-x = x$, $\forall x \in A$. (Sugestão: considere o produto $(x + x)^2$).

5. Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família de subanéis de um anel A. Mostre que $\bigcap_{i \in I} A_i$ também é um subanel de A.

6. Seja $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de subanéis de um anel A tal que $B_i \subset B_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Mostre que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ também é um subanel de A.

7. Assuma que A é um anel e $a \in A$. Se $C(a)$ denota o conjunto de todos os elementos que comutam com a,
$$C(a) = \{x \in A : \, ax = xa\},$$
mostre que $C(a)$ é um subanel de A.

8. Seja A um anel e $n \in \mathbb{N}$. Defina o conjunto c_n por
$$c_n = \{a \in A : \, n^k a = 0, \, \forall k > 0\}.$$
Mostre que c_n é um subanel do anel A.

9. Dados A um anel e $a \in A$. Mostre que $I_a = \{x \in A : \, ax = 0\}$ é um subanel de A.

10. Seja A um anel e $n \in \mathbb{N}$. Defina o conjunto S_n por
$$S_n = \{a \in A : \, n^k a = 0, \, \forall k > 0\}.$$
Mostre que S_n é um subanel do anel A.