Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise Real I - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 de Exercícios

1. Mostre que o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é um fechado de $\mathbb{R}$.

2. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é fechado e nem aberto de $\mathbb{R}$.

3. Prove que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

4. Prove que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Em seguida, usando $A = (a, b)$ e $B = (b, c)$, justifique que não se pode ter a conteção contrária, ou seja, não vale a igualdade como no exercício anterior.

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Prove que X é fechado se, e somente se, $\partial X \cap X = \emptyset$.

6. Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$.
   (a) Mostre que toda bola aberta em M é um aberto de M.
   (b) Mostre que $\text{int}(A)$ é um aberto de M e ∂A é um fechado de M.

7. Determine:
   (a) $\partial\mathbb{N}$. (b) $\partial\mathbb{Z}$. (c) $\partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$. (d) $\partial\mathbb{Q}$. (e) $\partial(\mathbb{I})$.

8. Determine a fronteira do conjunto $X = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

9. Seja $X = (1, 1] \cup \{2\}$. Prove que $(0, 1) \subset X'$, $0 \in X'$ e $1 \in X'$.

10. Prove que todo ponto interior de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X, i.e., que $\text{int}(X) \subset X'$ (Obs.: Em particular, se X for aberto, então $X \subset X'$).

11. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Prove que $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

12. Determine o interior, a fronteira, o derivado e o fecho do seguinte subconjunto dos números reais:
$$A = \{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\} \cup (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}) \cup \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

13. Dê um exemplo de cobertura aberta para o intervalo $(0, 1)$ que não possua subcobertura finita.

14. Mostre que o conjunto $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\}$ é compacto de duas formas:
    (a) usando a definição de conjunto compacto;
    (b) usando o Teorema de Heine-Borel.

15. Se A e B forem dois compactos de $\mathbb{R}$, mostre que $A \cup B$ também é um compacto de $\mathbb{R}$

16. Prove que a união finita de compactos de $\mathbb{R}$ é um compacto.

17. Prove que a interseção de uma família de compactos de $\mathbb{R}$ é um compacto de $\mathbb{R}$.

18. **(Sel. Mestrado USFM 2017/2)** Seja $A = \{x \in \mathbb{R}\ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$. Encontre, justificando sua resposta:

    (a) o conjunto dos pontos de acumulação de A;

    (b) a fronteira de A;

    (c) o conjunto dos pontos interiores de A.

19. **(Sel. Mestrado USFM 2011/1)**

    (a) Considere o conjunto $Y = (1,2) \cup \{0,3,4\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Encontre $\text{int}(Y)$ e $\overline{Y}$. Além disso, diga se Y é aberto, fechado ou nem aberto nem fechado. Justifique.

    (b) Prove que se K é compacto, então o conjunto

    $$S = \{x + y : x, y, \in K\}$$

    também é compacto.

    (c) Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Dê um exemplo em que $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.