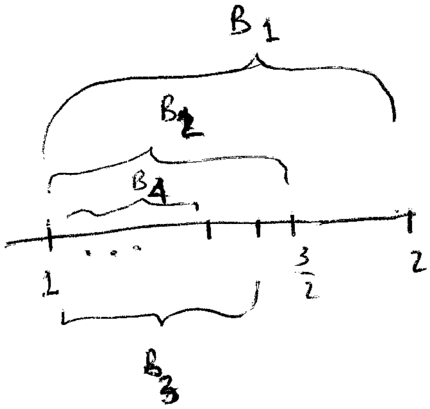
LISTA 01.

10) $B_n = \{[1, 1+\frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$.



$B_1 = [1, 2]$

$B_2 = [1, 1+\frac{1}{2}]$

$B_3 = [1, 1+\frac{1}{3}]$

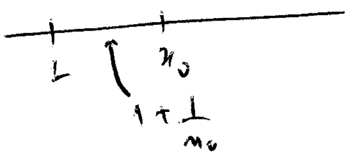
$\vdots$

Por construção temos $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$

Assim, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = B_1$.

AF: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \emptyset$: Como $\emptyset \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, é suficiente mostrar que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \emptyset$. Por absurdo, suponha que $\exists x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Vamos mostrar que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \notin B_{n_0}$, chegando assim a uma contradição. Ou seja, mostraremos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 > 1 + \frac{1}{n_0}$:



De fato, se $x_0 \leq 1 + \frac{1}{n_0}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, então

$x_0 - 1 \leq \frac{1}{n_0}$, i.e., $n_0 \leq \frac{1}{x_0 - 1}$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$,

ou seja temos $\mathbb{N}$ limitado superiormente, um absurdo! Logo, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x_0 \notin B_{n_0}$, ou seja,

$x_0 \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

29) $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \{0,1\}^X \; ; \; \varphi(A) = \chi_A$

$\{0,1\}^X := \{f : X \longrightarrow \{0,1\}\}$ - conj. de todas as funções $X \to \{0,1\}$.

• <u>AF-01</u>: φ é injetiva: Dados $B, C \in \mathcal{P}(X)$, com $B \neq C$, então $\chi_B \neq \chi_C$, ou seja, $\varphi(B) \neq \varphi(C)$. Logo, φ é inj.

• <u>AF-02</u>: φ é sobrejetiva:

cada $f \in \{0,1\}^X$ (i.e.; $f : X \to \{0,1\}$),

$\exists\; S \subset X$ que contém todos $x \in X$ tais que $f(x) = 1$ e, $\forall x \in X \setminus S$, $f(x) = 0$; i.e., a função é a mesma que $\chi_S = \varphi(S)$. Logo, φ é sobrejetiva.

Pelos <u>AF-01</u> e <u>02</u>, φ é bijetiva.

LISTA 02

28) Como $A \neq \emptyset$, $\exists\ x_0 \in A$. Então,

$$c \cdot x_0 \in cA \ , \text{ i.e; } \ c \cdot A \neq \emptyset .$$

Seja $M = \sup A$ (ele existe pois $A \subset \mathbb{R}$ e é limitado).
Então, temos que, $x \leq M, \forall x \in A$.

$\Rightarrow cx \leq cM, \forall x \in A$.

Ou seja $c \cdot A$ é limitado superiormente por $c \cdot M$.
Como $c.A \subset \mathbb{R}$, segue que $\exists \sup(c.A)$ e que

$$\sup(c \cdot A) \leq c \cdot M = c \cdot \sup A \qquad (I)$$

Resta mostrar a desigualdade contrária.

Dado $\varepsilon > 0$, então, como $M = \sup A$, $\exists\ x_0 \in A$ tal que

$$x_0 > M - \frac{\varepsilon}{c} \qquad (\times c > 0 :)$$

$c \cdot x_0 > cM - \varepsilon$, e como $\sup(c.A) \geq c \cdot x_0$,

$$\sup(cA) \geq c \cdot x_0 > c \cdot \left(M - \frac{\varepsilon}{c}\right) = cM - \varepsilon$$

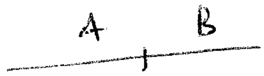
$$\Rightarrow \sup(c \cdot A) > cM - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \text{ ou seja,}$$

$$\sup(c \cdot A) \geq cM = c \cdot \sup A \qquad (II)$$

De (I) e (II) segue que $\sup(cA) = c \cdot \sup A$.
... de análogo se faz para o ínfimo.

31) $A, B \subset \mathbb{R}$ não vazios tais que, $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$,

$x \leq y$.



Então, $\forall x \in A$ fixado, tem-se que x é uma cota inferior para B. Logo, $x \leq \inf B$, $\forall x \in A$

Logo, $\inf B$ é uma cota superior para A, i.e.,

$$\sup A \leq \inf B \qquad (I)$$

Por fim, resta mostrar:

$$\sup A = \inf B \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \text{ e } \exists y \in B : y - x < \varepsilon.$$

($\Rightarrow$) Suponha que $\sup A = \inf B$.

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Então,

$\exists x \in A$ tal que $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, i.e.,

$$-x < -\sup A + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Ainda,

$\exists y \in B$ tal que $y < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad (**)$

Somando $(*)$ com $(**)$ vem:

$$y - x < \underbrace{\inf A - \sup A}_{= 0} + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$= 0$, pois $\sup A = \inf B$, por hip.

$\Rightarrow y - x < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$): Reciprocamente, suponha que,

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Então:

$$y < x + \varepsilon \text{ , e ainda;}$$

$$\inf. B \leq y < x + \varepsilon \leq \sup A + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf. B < \sup A + \varepsilon \text{ , } \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\inf. B \leq \sup A}$$

Como a desigualdade no outro sentido é sempre verdadeira (veja (I)), segue a igualdade desejada, i.e; $\boxed{\inf. B = \sup A.}$ □

LISTA 03:

03) A função f é tal que manda $\frac{1}{2} \longmapsto 1$ (DESSA FORMA MANDAMOS UM ELEMENTO DE $(0,1)$ PARA A EXTREMIDADE 1), $\frac{1}{3} \longmapsto \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} \longmapsto \frac{1}{3}$; ..., $\frac{1}{n} \longmapsto \frac{1}{n-1}$, ... de forma bijetiva para tais pontos. Nos outros casos, obviamente $x \longmapsto x$ é bijetiva. Portanto, f é bijetiva e então $(0,1) \sim (0,1]$.

---

04) Como $A \subset B$, defina $f: A \to B$ por $f(x) = x$. Então, f é injetiva e daí, $\text{card } A \leq \text{card } B$.

10) Basta observar que $f: \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ definida por $f(n) = \ln(n)$ é bijetiva e, portanto,

$$f(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N} \text{, ou seja,}$$

$$f(\mathbb{N}) = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \text{ é enumerável.}$$

---

16) $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) \Rightarrow 2^m \cdot 3^n = 2^a \cdot 3^b \Rightarrow$

$\Rightarrow m = a$ e $n = b$.

Portanto, f é injetiva. Como $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ é injetiva e $\mathbb{N}$ é enumerável, por proposição segue que $\mathbb{Q}^+$ é enumerável.

---

20) Repare que

$(0,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \cdots \subset \mathbb{R}$ e tal união é disjunta, então,

$$\Big(\underbrace{\text{card}(0,1)}_{=c} + \underbrace{\text{card}(1,2)}_{=c} + \underbrace{\text{card}(2,3)}_{=c} + \cdots\Big) \leq \text{card } \mathbb{R} = c$$

$$\Rightarrow \boxed{c + c + c + \cdots = c}$$

06