GABARITO DA 1ª PROVA DE INTR. À ÁLGEBRA.

01) (a) Dado $x \in \bigcup B_i$. Logo, $\exists i_0 \in I$ tal que $x \in B_{i_0}$. Como $B_{i_0} \subset B$, segue que $x \in B$.

Portanto, $\bigcup_{i \in I} B_i \subset B$.

0,5

(b) Basta notar que:

$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \Longleftrightarrow f(x) \in B_i$, para algum $i \in I$

0,5 $\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_i)$, para algum $i \in I \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

---

02) (a) • T é reflexiva, pois

$(x_1, y_1)\, T\, (x_1, y_1) \Leftrightarrow 4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_1^2 + 9y_1^2$

• T é simétrica, pois:

$(x_1, y_1)\, T\, (x_2, y_2) \Rightarrow 4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_2^2 + 9y_2^2$

0,5

$\Rightarrow 4x_2^2 + 9y_2^2 = 4x_1^2 + 9y_1^2 \Rightarrow (x_2, y_2)\, T\, (x_1, y_1)$.

• T é transitiva, pois, se $(x_1, y_1)\, T\, (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2)\, T\, (x_3, y_3)$, então

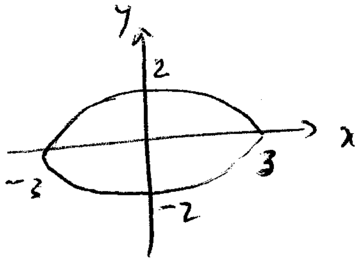
$4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_2^2 + 9y_2^2$ e $4x_2^2 + 9y_2^2 = 4x_3^2 + 9y_3^2$,

ou seja, $4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_3^2 + 9y_3^2 \Rightarrow (x_1, y_1)\, T\, (x_3, y_3)$.

(b) $\overline{(3,0)} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y)\,T\,(3,0)\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+9y^2 = 4\cdot 3^2+9\cdot 0^2\}$

0,5 $= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+9y^2 = 36\}$ (ELIPSE)



(c) $\mathbb{R}^2/T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+9y^2 = \text{const}\}$ 0,5

= família de elipses.

---

03) (a) • R é simétrica pois $X \subset X$.

0,5 • R é anti-simétrica pois $X\subset Y$ e $Y \subset X \Rightarrow Y = X$.

• R é transitiva pois $X\subset Y$ e $Y\subset Z \Rightarrow X \subset Z$.

(b) Não, pois existem elementos não comparáveis, i.e, podemos obter conj. X e Y em E tais que

0,5 $X \not\subset Y$ e $Y \not\subset X$.

---

04) (a)

- ASSOCIATIVIDADE: vale a assoc. do prod. de matrizes:

0,5 $$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C.$$

- ∃ neutro multiplicativo: é a matriz identidade I

0,5 $$A\cdot I = A \quad e \quad I\cdot A = A.$$

- todo elemento é simetrizável. De fato, como $\det A = 1$, $\forall A \in G$, i.e., $\det A \neq 0$, e então

0,5 A é inversível, segue que $\exists A^{-1}$ tal que
$$A\cdot A^{-1} = I \quad e \quad A^{-1}A = I.$$

---

05) $F = \{f: A \to A : f$ é bijetiva$\}$.

- Dados $f, g, h \in F$, temos:

- associatividade
$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h).$$

1,0

- neutro: é a ~~função~~ $id_A: A \to A$ identidade
$$f\circ id_A = f \quad e \quad id_A\circ f = f.$$

- simetrico: é a inversa f^{-1} (existe pois f é bijetiva e, então, inversível):
$$f\circ f^{-1} = id_A \quad e \quad f^{-1}\circ f = id_A$$

Esse grupo não é abeliano, pois, em geral, a

0,5 composição de funções não é comutativa, i.e., em geral $f\circ g \neq g\circ f$.

Quando $A = \{1,2,3\}$ então temos o grupo das permutações $S_3 = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=id} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ;$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Big\}.$

$\circ$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\vdots$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\vdots$	$\vdots$		
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\vdots$			
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$					

etc.

1,0

POR EX.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id.$$

06) $x \cdot x = e$, $\forall x \in G$. Como $a \cdot b \in G$, onde $a, b \in G$, então:

$$(a \cdot b) \cdot (ab) = e \quad .$$

Multiplicando à esquerda por a e à direita por b, obtemos:

$$a \cdot (ab \cdot ab) \cdot b = a \cdot e \cdot b.$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a \cdot a)}_{= e} \cdot (b \cdot a) \cdot \underbrace{(b \cdot b)}_{= e} = a \cdot b$$

$$\Rightarrow b \cdot a = a \cdot b, \quad \forall a, b \in G.$$

Ou seja, G é abeliano.

1,0

---

07) $H_i < G$, $\forall i \in I$. $H_i < H_j$, se $i < j$.

Mostrar: $\bigcup_{i \geq 1}^{\infty} H_i < G$.

Dados $\alpha, \beta \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$. Então, $\exists\, i, j \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha \in H_i$ e $\beta \in H_j$. Sem perda de generalidade, assuma que $i < j$. Então $H_i < H_j$ e, então $\alpha \in H_j$. Logo, como $H_j < G$, segue que

$$\alpha \cdot \beta^{-1} \in H_j \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i \Rightarrow \alpha \cdot \beta^{-1} \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$$

Logo, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i < G$.

1,5

03) (a) $f(H) < G$: $\quad f(H) = \{ gxg^{-1} : x \in H \}$.

Dados $\alpha, \beta \in f(H)$. Logo, $\exists \; x, y \in H$ tais que $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$; i.e.;

$$gxg^{-1} = \alpha \quad e \quad gyg^{-1} = \beta$$

Então:

$$\begin{aligned} \alpha . \beta^{-1} &= gxg^{-1}(gyg^{-1})^{-1} \\ &= gxg^{-1}(g^{-1})^{-1}. y^{-1} g^{-1} \\ &= gx \underbrace{g^{-1}g}_{e} . y^{-1} g^{-1} \\ &= g \underbrace{x . y^{-1}}_{\in H < G} . g^{-1} \quad \in f(H). \end{aligned}$$

1.0

Logo, $f(H) < G$.

(b) $$\begin{aligned} f^{-1}(H) &= \{ x \in G : f(x) \in H \} \\ &= \{ x \in G : gxg^{-1} \in H \}. \end{aligned}$$

1º: $f^{-1}(H) \neq \emptyset$ pois $e \in f^{-1}(H)$, visto que

$$geg^{-1} = g . g^{-1} = e \in H < G.$$

1.0

2º: $f^{-1}(H) < G$: Dados $\alpha, \beta \in f^{-1}(H)$, então $g\alpha g^{-1}, g\beta g^{-1} \in H$. Como $H < G$; $(g\beta g^{-1})^{-1} \in H$, i.e.; $(g^{-1})^{-1} \beta^{-1} g^{-1} \in H$, i.e.; $g\beta^{-1}g^{-1} \in H$. Assim; ainda, como $H < G$,

06

temos que

$$(g\alpha g^{-1})(g\beta^{-1}g^{-1}) \in H \quad \text{, ou seja,}$$

$$g\alpha\underbrace{(g^{-1}g)}_{e}\beta^{-1}g^{-1} \in H \quad \text{, i.e.,}$$

$$g(\alpha\beta^{-1})g^{-1} \in H \quad \text{. Portanto,}$$

pela def. $f^{-1}(H)$, segue que $\alpha . \beta^{-1} \in f^{-1}(H)$.

Logo, $f^{-1}(H) < G$.

$\square$

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira prova de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 27/04/2018

Questão 01. Sejam $f : A \to B$ uma função e $(B_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$, tal que $B_i \subset B$, $\forall i \in I$.

(a) Mostre que $\bigcup_{i \in I} B_i \subset B$.

(b) Mostre que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \subset A$.

Questão 02. Seja $\mathcal{T}$ a relação definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$(x_1, y_1)\mathcal{T}(x_2, y_2) \Leftrightarrow 4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_2^2 + 9y_2^2.$$

(a) Prove que $\mathcal{T}$ é uma relação de equivalência.

(b) Descreva geometricamente a classe $\overline{(3,0)}$.

(c) Descreva o conjunto-quociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{T}$.

Questão 03. Seja E o espaço fundamental e $\subset$ a operação de contenção em E. Defina a seguinte relação em E:

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

(a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial em E.

(b) A relação $\mathcal{R}$ ordena E totalmente? Justifique.

Questão 04. Seja $G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Mostre que $(G, \cdot)$ é um grupo, onde "$\cdot$" denota o produto usual de matrizes.

Questão 05. Considere F o conjunto de todas as bijeções de A em A. Mostre que $(F, \circ)$ é um grupo, onde $\circ$ denota a composição de funções. Este grupo é abeliano? Quando A for finito, o que representa $(F, \circ)$? Exemplifique esta situação quando $A = \{1, 2, 3\}$, construindo uma tábua da operação de composição. Destaque um subgrupo neste caso.

Questão 06. Seja $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo (i.e., estamos usando a notação multiplicativa). Se $x \cdot x = e$, $\forall x \in G$, onde e denota o elemento neutro de G, mostre que G é abeliano.

Questão 07. Sejam G um grupo e $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma família de subgrupos de G, indexada por $i \in \mathbb{N}$, tal que $H_i \subset H_j$, se $i < j$. Mostre que $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i < G$.

Questão 08. Seja G um grupo e $H < G$. Defina $f : G \to G$ por

$$f(x) = gxg^{-1},$$

onde $g \in G$ é uma constante fixada.

(a) Mostre que $f(H) < G$.

(b) Considere o conjunto $f^{-1}(H)$. Mostre que o mesmo está bem definido, i.e., que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Em seguida, prove que $f^{-1}(H) < G$.

Questão	01	02	03	04	05	06	07	08
Valor	1,0	1,5	1,0	1,5	2,5	1,0	1,5	2,0