

Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira Prova de Análise Real I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome:

Data: 04/05/2018

Questão 01.

- (a) Dadas as funções $f : A \rightarrow B$, $g : A \rightarrow B$ e $h : B \rightarrow D$, prove que se h é injetiva e $h \circ g = h \circ f$, então $g = f$.
- (b) Dados A, B e C conjuntos, tais que $\text{card } A \leq \text{card } B$ e $\text{card } B \leq \text{card } C$. Mostre que $\text{card } A \leq \text{card } C$.

Questão 02. Mostre que, para qualquer número real $y > 0$, tem-se

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{y}{n}] = \emptyset.$$

Questão 03. Prove que em um corpo ordenado \mathbb{K} valem

$$x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{K} \quad \text{e} \quad 0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Questão 04. Sejam a, b no corpo dos reais e $0 < r < 1$ tais que $|b - a| < r|a|$. Mostre que

$$|b| > (1 - r)|a|.$$

Questão 05. Dizemos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada superiormente se o conjunto imagem $f(X)$ for um conjunto limitado superiormente, e então escrevemos $\sup f = \sup_{x \in X} f(x)$.

- (a) Prove que se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ forem limitadas superiormente, então a função $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ também é limitada superiormente, e

$$\sup(f \cdot g) \leq \sup f \cdot \sup g.$$

- (b) Dê um exemplo onde a desigualdade acima é estrita.

Questão 06. Em cada um dos casos abaixo, diga se o conjunto dado é enumerável ou não enumerável, justificando:

- (a) o conjunto \mathbb{I} dos números irracionais.
- (b) o conjunto $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (c) o conjunto de todos os $x \in [0, 1)$, cuja expansão em base 10 não contém nunca dois algarismos consecutivos iguais.

Questão 07. Se $A \subset B$, mostre que $\text{card } A \leq \text{card } B$. Use isto para mostrar que $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Questão	01	02	03	04	05	06	07
Valor	1,5	1,0	1,0	1,0	2,0	3,0	1,5