Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Primeira prova de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 27/04/2018

Questão 01. Sejam $f : A \to B$ uma função e $(B_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos indexada por $i \in I$, tal que $B_i \subset B$, $\forall i \in I$.

(a) Mostre que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_i \subset B$.

(b) Mostre que $\displaystyle f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subset A$.

Questão 02. Seja $\mathcal{T}$ a relação definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$(x_1, y_1)\mathcal{T}(x_2, y_2) \Leftrightarrow 4x_1^2 + 9y_1^2 = 4x_2^2 + 9y_2^2.$$

(a) Prove que $\mathcal{T}$ é uma relação de equivalência.

(b) Descreva geometricamente a classe $\overline{(3,0)}$.

(c) Descreva o conjunto-quociente $\mathbb{R}^2/\mathcal{T}$.

Questão 03. Seja E o espaço fundamental e $\subset$ a operação de contenção em E. Defina a seguinte relação em E:

$$X\,\mathcal{R}\,Y \Leftrightarrow X \subset Y.$$

(a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem parcial em E.

(b) A relação $\mathcal{R}$ ordena E totalmente? Justifique.

Questão 04. Seja $G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$. Mostre que $(G, \cdot)$ é um grupo, onde "$\cdot$" denota o produto usual de matrizes.

Questão 05. Considere F o conjunto de todas as bijeções de A em A. Mostre que $(F, \circ)$ é um grupo, onde $\circ$ denota a composição de funções. Este grupo é abeliano? Quando A for finito, o que representa $(F, \circ)$? Exemplifique esta situação quando $A = \{1, 2, 3\}$, construindo uma tábua da operação de composição. Destaque um subgrupo neste caso.

Questão 06. Seja $(G, \cdot)$ um grupo multiplicativo (i.e., estamos usando a notação multiplicativa). Se $x \cdot x = e$, $\forall x \in G$, onde e denota o elemento neutro de G, mostre que G é abeliano.

Questão 07. Sejam G um grupo e $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de subgrupos de G, indexada por $i \in \mathbb{N}$, tal que $H_i \subset H_j$, se $i < j$. Mostre que $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i < G$.

Questão 08. Seja G um grupo e $H < G$. Defina $f : G \to G$ por

$$f(x) = gxg^{-1},$$

onde $g \in G$ é uma constante fixada.

(a) Mostre que $f(H) < G$.

(b) Considere o conjunto $f^{-1}(H)$. Mostre que o mesmo está bem definido, i.e., que $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Em seguida, prove que $f^{-1}(H) < G$.

Questão	01	02	03	04	05	06	07	08
Valor	1,0	1,5	1,0	1,5	2,5	1,0	1,5	2,0