Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 08 - Teorema dos isomorfismos

1. Mostre que $\dfrac{(\mathbb{R}^\star, \cdot)}{(\mathbb{R}^+, \cdot)} \simeq (\{-1, 1\}, \cdot)$.

2. Mostre que $\dfrac{M_{2,2}(\mathbb{Z})}{M_{2,2}(n\mathbb{Z})} \simeq M_{2,2}(\mathbb{Z}_n)$.

3. Sejam G_1 e G_2 grupos, $H_1 \lhd G_1$ e $H_2 \lhd G_2$.
   (a) Prove que $H_1 \times H_2 \lhd G_1 \times G_2$.
   (b) Prove que $G_1 \times G_2 / H_1 \times H_2 \simeq G_1/H_1 \times G_2/H_2$.

4. Seja G um grupo finito e $n \geq 2$. Suponha que $(xy)^n = x^n y^n$, $\forall x, y \in G$. Defina os conjuntos
$$G_n = \{z \in G : z^n = e\} \quad \text{e} \quad G^n = \{x^n : x \in G\}.$$
   Mostre que
   (a) $G_n \lhd G$ e $G^n \lhd G$;
   (b) $|G^n| = |G : G_n|$. (Sugestão: construa um homomorfismo).

5. Sejam G e H grupos. Defina o produto direto $G \times H = \{(a, b) : a \in G \text{ e } b \in H\}$ e a operação induzida por
$$(a, b) \star (c, d) = (ac, bd).$$
   Mostrar que
   (a) $G \times H$ é um grupo;
   (b) $N = \{(a, e) : a \in G\} \lhd G \times H$;
   (c) $(G \times H)/N \simeq H$.

6. Sejam G um grupo e H, K dois subgrupos normais de G.
   (a) Mostre que $H \cap K \lhd G$.
   (b) Mostre que $G/(H \cap K) \simeq G/H \times G/K$.

7. Sejam H e K dois subgrupos normais de um grupo aditivo G. Defina o conjunto
$$H + K = \{h + k : h \in H \text{ e } k \in K\}.$$
   (a) Mostre que $H + K < G$.
   (b) Mostre que $\dfrac{H}{H \cap K} \simeq \dfrac{H + K}{K}$.

8. Dados G um grupo e $H \lhd G$. Considere $f : G \to f(G) = \mathrm{Im}(f)$ um homomorfismo de grupos.

   (a) Mostre que $f(H) \lhd \mathrm{Im}(f)$.

   (b) Mostre que $\dfrac{G}{H} \simeq \dfrac{f(G)}{f(H)}$.

9. Sejam $\varphi : G \to H$ um isomorfismo de grupos e $K \lhd H$. Prove que

$$\varphi^{-1}(K) \lhd G \quad \text{e} \quad \frac{G}{\varphi^{-1}(K)} \simeq \frac{H}{K}.$$

10. Sejam $K < H < G$, com $K \lhd G$ e $H \lhd G$. Mostre que

$$\frac{G/K}{H/K} \simeq G/H.$$