Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 07 - Homomorfismos de grupos

1. Seja $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = (x-y, 0)$. Prove que f é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em si mesmo e determine $\ker(f)$.

2. Prove que um grupo G é abeliano se, e somente se, $f : G \to G$ dada por $f(x) = x^{-1}$ é um homomorfismo.

3. Sejam $G = GL_n(\mathbb{R})$ o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas reais e $\varphi : G \to \mathbb{R}^\star$ dada por $\varphi(A) = \det(A)$. Mostre que φ é um homomorfismo de grupos e calcule o seu núcleo.

4. Seja $f : G \to H$ um homomorfismo de grupos onde H é abeliano. Provar que todo subgrupo de G que contém $\ker(f)$ é normal em G.

5. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ dada por $\varphi(x) = e^{ix}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que φ é um homomorfismo. φ é injetivo? Justifique.

6. Seja $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$ definida por $f(\overline{x}) = \overline{2x}$. Mostre que f é um homomorfismo e determine $\ker f$ e $\mathrm{Im}(f)$.

7. Prove que se $\varphi : G \to G'$ é um isomorfismo, então x e $\varphi(x)$ têm a mesma ordem, $\forall x \in G$.

8. Mostre que $G = \{2^m 3^n \ : m, n \in \mathbb{Z}\}$ e $G' = \{m + ni \ : m, n \in \mathbb{Z}\}$ são subgrupos, respectivamente, de $(\mathbb{R}^\star, \cdot)$ e $(\mathbb{C}, +)$. Mostre também que são isomorfos.

9. Sejam G e G' grupos multiplicativos e $f : G \to G'$ um homomorfismo. Considerando H um subgrupo de G', definimos $f^{-1}(H) = \{x \in G \ : f(x) \in H\}$. Mostre que $f^{-1}(H) < G$.

10. Prove que a relação "ser isomorfo" é uma relação de equivalência.

11. Seja a um elemento fixo em um grupo multiplicativo G. Prove que $f : G \to G$ dada por $f(x) = axa^{-1}$ é um isomorfismo.

12. Sejam G, H, I e J grupos. Se $f : G \to I$ e $g : H \to J$ são isomorfismos, mostre que $\varphi : G \times H \to I \times J$ dada por

$$\varphi(x, y) = (f(x), g(y)),$$

para todo $(x, y) \in G \times H$, é também um isomorfismo.