Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Introdução à Álgebra
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 06 - Subgrupos normais

1. Mostre que a intersecção de subgrupos normais é um subgrupo normal.

2. Sejam G e H dois grupos e o produto cartesiano: $G\times H=\{(a,b) : a\in G \text{ e } b\in H\}$ e a operação $\star$ induzida por

$$(a,b)\star(c,d)=(ac,bd).$$

   (a) Mostre que $G\times H$ é um grupo.

   (b) Mostre que $N=\{(a,e) : a\in G\}\lhd G\times H$.

3. Procure todos os subgrupos normais de S_3 e $D_\Box$.

4. Sejam G um grupo cíclico e $H\lhd G$. Mostre que G/H é cíclico.

5. Sejam G um grupo e $H<G$. Mostre que se o índice de H em G é 2, então $H\lhd G$.

6. Seja G um grupo e defina S por $S=\{xyx^{-1}y^{-1} : x,y\in G\}$. Mostre que $G'=\langle S\rangle$ é um subgrupo normal de G.

7. Seja G um grupo finito e $n\geq 2$. Suponha que $(xy)^n=x^ny^n$, $\forall x,y\in G$. Defina os conjuntos $G_n=\{x\in G : x^n=e\}$ e $G^n=\{y^n : y\in G\}$. Prove que G_n e G^n são subgrupos normais de G.

8. Para quaisquer $a,b\in\mathbb{R}$ defina $\tau_{a,b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $\tau_{a,b}(x)=ax+b$. Considere $G=\{\tau_{a,b} : a,b\in\mathbb{R} \text{ e } a\neq 0\}$. Mostre que

   (a) G é um grupo com a composição de funções.

   (b) $N=\{\tau_{1,b} : b\in\mathbb{R}\}\lhd G$.

9. Seja T o grupo das matrizes triangulares superiores 2×2 inversíveis com entradas reais, i.e., matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix},$$

onde $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $ac\neq 0$. Seja U o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

onde $x\in\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $U<T$.

   (b) Prove que U é abeliano.

   (c) Prove que $U\lhd T$.