**Universidade Federal de Pelotas**
**Curso de Licenciatura em Matemática**
**Disciplina de Introdução à Álgebra**
**Prof. Dr. Maurício Zahn**
**Lista 05 - Grupos cíclicos, classes laterais e o Teorema de Lagrange**

1. Considere no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos as raízes da equação $z^{12} - 1 = 0$.
   (a) Mostre que o conjunto $G$ formado pelas raízes da equação acima, com o produto usual em $\mathbb{C}$ é um grupo.
   (b) Faça uma representação geométrica no plano de Argand-Gauss das raízes décimas segundas de 1. Em seguida, na representação feita, destaque um subconjunto $H$ de $G$ que possua o vértice correspondente ao afixo $z = 1$ e outros dois vértices de forma a obter um triângulo equilátero. Mostre que $H < G$.
   (c) Obtenha um subgrupo $K$ de $G$ de ordem 6. Identifique-o na representação.
   (d) O grupo $G$ é cíclico? Justifique.
   (e) Obtenha todas as classes laterais à esquerda e à direita de $H$.
   (f) Encontre as ordens das primeiras quatro raízes da equação em (a).

2. Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$. Indicando por $G_m$ o conjunto das raízes m-ésimas complexas de 1, mostre que $(G_m, \cdot)$ é um subgrupo cíclico de $(\mathbb{C}^\star, \cdot)$, onde $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

3. Determine todas as classes laterais de $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ no grupo aditivo $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Sejam $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$ e $H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$ um subgrupo de $G$. Construa a tábua do grupo quociente $(G/H, +)$, identifique seu elemento neutro e os inversos aditivos de $\overline{1} + H$ e $\overline{2} + H$.

5. Se $ghg^{-1} \in H$, para todo $g \in G$ e $h \in H$, $H < G$, mostre que $gH = Hg$, $\forall g \in G$, i.e., as classes laterais à esquerda e à direita, neste caso, são idênticas.

6. Seja $S_3$ o grupo das permutações de $A = \{1, 2, 3\}$. Determine todas as classes laterais à esquerda e à direita de $H = \{id, \beta\}$, onde
$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Vimos na teoria a definição de ordem de um grupo. Definimos também a *ordem de um elemento de um grupo $G$*: se $\alpha$ é um elemento de um grupo $G$, a ordem de $\alpha$ é a ordem do subgrupo gerado por $\alpha$ e é denotada por $|\langle\alpha\rangle|$ ou $O(\alpha)$.
   Seja $G$ um grupo e $\alpha \in G$, $\alpha \neq e$.
   (a) Mostre que $\alpha$ tem ordem 2 se, e somente se, $\alpha = \alpha^{-1}$.
   (b) Mostre que se $O(\alpha) = m \cdot n$, então $O(\alpha^m) = n$.

8. Seja $G$ um grupo e $a \in G$ tal que $O(a) = m$. Mostre que se $a^t = e$, então $m|t$.

9. Seja $G = \langle a\rangle$ o grupo cíclico gerado por $a$ e suponha que $O(a) = m$. Mostre que $a^n$ gera $G$ se, e somente se, $mdc(m, n) = 1$.

10. Seja $G$ um grupo multiplicativo tal que $|G| = 100$. Mostre que a equação $x^7 = 1$ tem somente uma solução $x \in G$.

11. Seja $G$ um grupo abeliano e considere o subconjunto $T(G) := \{\alpha \in G : O(\alpha) < \infty\}$. Mostre que $T(G) < G$.
    **Obs.:** $T(G)$ é chamado de subgrupo *torção* de $G$.

12. Seja $G$ um grupo de ordem $p^n$, onde $p$ é primo e $n > 1$. Mostre que a ordem de um elemento qualquer de $G$ é uma potência de $p$.

13. Em $S_3$, procure as ordens de todos os seus elementos e de todos os subgrupos. Verifique o Teorema de Lagrange.

14. Determine as classes laterais de $H = \langle \overline{4} \rangle$ em $(\mathbb{Z}_8, +)$ e o conjunto quociente $\mathbb{Z}_8/H$.